1988年度入学試験問題

数　　学　（理系）

200点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページがある．
3. 問題は全部で6題ある．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，解答用ページに続き方をはっきり示した場合は，見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．なお，他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

（30 点）

実数 a，b に対し，$f(x) = x^2 + ax + b$，$g(x) = f(f(x))$ とする．

(1) $g(x) - x$ は $f(x) - x$ で割り切れることを示せ．

(2) $g(p) = p$ かつ $f(p) \neq p$ をみたす実数 p が存在するような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ．

2

（30 点）

三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA をそれぞれ $2:1$ に内分する点を A_1，B_1，C_1 とし，また線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$，$\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$，$\mathrm{C}_1\mathrm{A}_1$ をそれぞれ $2:1$ に内分する点を A_2，B_2，C_2 とする．このとき，三角形 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$ は三角形 ABC に相似であることを示せ．

3

（35 点）

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．

(1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で，$x^2 - 3y^2 = 1$，$x > 0$，$y \geqq 1$ ならば，$x'^2 - 3y'^2 = 1$，$0 \leqq y' < y$ が成立することを示せ．

(2) x，y が $x^2 - 3y^2 = 1$ をみたす自然数ならば，ある自然数 n をとると $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となることを示せ．

4

（35 点）

各辺の長さが 2 の正四面体 ABCD を座標空間内で考える．辺 AB は x 軸上にあって，その中点は原点 O と一致し，辺 CD の中点 M は z 軸の正の部分にあるとする．また，$0 < t < 1$ をみたす実数 t について，線分 OM を $t : (1-t)$ の比に内分する点を通り，OM に垂直な平面を α とする．

(1) 2 頂点 C，D の座標を求めよ．ただし，C の y 座標は正であるとする．

(2) 平面 α による正四面体 ABCD の切口は，どのような平面図形か．

(3) 平面 α で分けられた正四面体 ABCD の 2 つの部分のうち，原点に近い部分の体積を求めよ．

5

（35 点）

一辺の長さが 1 の正方形と，一辺の長さが 2 の正方形でできたタイルが多数大きな袋に入っている．でたらめにタイルを一枚取り出すとき，小さいタイルが取り出される確率を p，大きいタイルが取り出される確率を $q = 1 - p$ とする．縦の長さが 3，横の長さが 6 の長方形に，取り出されたタイルを敷きつめていくとき，ちょうど n 回でこの長方形が過不足なく敷きつめられる確率を求めよ．

6

（35 点）

単位を cm とする．$y = \dfrac{a}{x} + b$，$0 \leqq y \leqq 8$ で表される曲線を y 軸のまわりに回転させて作った曲面を側面にもつような，底の平らな容器がある．ただし，上面の半径は 1cm，底面の半径は 5cm である．

(1) この容器に深さ 6cm まで水を入れたときの水の体積を求めよ．

(2) この容器に毎秒 $k\text{cm}^3$ の割合で水を入れるとき，深さ 3cm のときの水面の上昇速度を求めよ．

問題は，このページで終わりである。