

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1987年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

x の 3 次式

$$f(x) = ax^3 + (a^2 + b)x^2 + (2ab + c)x + a^2 + b^2 - a$$

$$g(x) = ax^3 + (a^2 - b)x^2 + (a - 1)x + c^2 - b^2$$

および x の 2 次式

$$h(x) = x^2 + ax + b$$

を考える. (a, b, c は定数, $a \neq 0$)

$f(x), g(x)$ はともに $h(x)$ で割り切れるか, または, ともに $h(x)$ では割り切れないかの, いずれかであることを示せ.

第 2 問

定数 a, p, q に対して, 次のように x_n, y_n の列を作る.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -1-a \\ -1+a & -1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

(1) x_2, y_2, x_3, y_3 を求めよ.

(2) $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ を求めよ.

第 3 問

不等式 $a \cos 2\theta + b \cos \theta < 1$ がすべての実数 θ について成り立つような点 (a, b) の範囲を図示せよ.

第 4 問

3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c は定数) のグラフ $y = f(x)$ と, 定数 m とを考える.

- (1) このグラフの接線で傾き m のものは何本あるか.
- (2) 傾き m の接線が 2 本ある場合について, その接線 l_1, l_2 の接点を P_1, P_2 とし, l_1, l_2 がグラフと交わる他の点を Q_1, Q_2 とすれば, $P_1Q_1 = P_2Q_2$ であることを示せ.

第 5 問

空間において，平面 $ax + y + z + a - 2 = 0$ (a は定数) を考える．

- (1) この平面上の点のうち原点に一番近いものの座標を求めよ．
- (2) 原点を中心とする半径 3 の球体がこの平面で分けられる二つの部分のうち，体積の大きくない方の体積を $V(a)$ とする． a をいろいろ変えたとき， $V(a)$ が最小になる a と，そのときの $V(a)$ の値を求めよ．

第 6 問

A, B, C の 3 人がいて、それぞれ、赤札と白札を 1 枚ずつ持っている。この状態から出発して、次のような札の移動を何回か行う。

各回の移動では、A は B に、B は C に、C は A に、持っている 2 枚の札のうち 1 枚を無作為に選んで、同時に渡す。

- (1) 何回かの移動の後起こりうる札の状態を全部書き上げ、それらに $F_0, F_1, F_2, \dots$ というように記号をつけよ。ただし、最初の状態には F_0 をつけよ。
- (2) 上で得た各状態 F_i から 1 回の移動で F_j になる確率 p_{ij} をそれぞれ求めよ。
- (3) 最初の状態から n 回移動したとき、 F_0 の状態にかえっている確率 q_n を求めよ。