1987年度入学試験問題

数　学　（理系）

200点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページがある．
3. 問題は全部で6題ある．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，解答用ページに続き方をはっきり示した場合は，見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．なお，他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

（30 点）

x の 3 次式

$$f(x) = ax^3 + (a^2 + b)x^2 + (2ab + c)x + a^2 + b^2 - a$$

$$g(x) = ax^3 + (a^2 - b)x^2 + (a - 1)x + c^2 - b^2$$

および x の 2 次式

$$h(x) = x^2 + ax + b$$

を考える．（a，b，c は定数，$a \neq 0$）

$f(x)$，$g(x)$ はともに $h(x)$ で割り切れるか，または，ともに $h(x)$ では割り切れないかの，いずれかであることを示せ．

2

（30 点）

定数 a，p，q に対して，次のように x_n，y_n の列を作る．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -1-a \\ -1+a & -1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

(1) x_2，y_2，x_3，y_3 を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{3}{2}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ を求めよ．

3

（35 点）

不等式 $a\cos 2\theta + b\cos\theta < 1$ がすべての実数 θ について成り立つような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ．

4

（35 点）

3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$（$a$，$b$，$c$ は定数）のグラフ $y = f(x)$ と，定数 m とを考える．

(1) このグラフの接線で傾き m のものは何本あるか．

(2) 傾き m の接線が 2 本ある場合について，その接線 l_1，l_2 の接点を P_1，P_2 とし，l_1，l_2 がグラフと交わる他の点を Q_1，Q_2 とすれば，$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 = \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$ であることを示せ．

5

（35 点）

空間において，平面 $ax + y + z + a - 2 = 0$（a は定数）を考える．

(1) この平面上の点のうち原点に一番近いものの座標を求めよ．

(2) 原点を中心とする半径 3 の球体がこの平面で分けられる二つの部分のうち，体積の大きくない方の体積を $V(a)$ とする．a をいろいろ変えたとき，$V(a)$ が最小になる a と，そのときの $V(a)$ の値を求めよ．

6

（35 点）

A，B，C の 3 人がいて，それぞれ，赤札と白札を 1 枚ずつ持っている．この状態から出発して，次のような札の移動を何回か行う．

各回の移動では，A は B に，B は C に，C は A に，持っている 2 枚の札のうち 1 枚を無作為に選んで，同時に渡す．

(1) 何回かの移動の後起こりうる札の状態を全部書き上げ，それらに $F_0, F_1, F_2, \cdots$ というように記号をつけよ．ただし，最初の状態には F_0 をつけよ．

(2) 上で得た各状態 F_i から 1 回の移動で F_j になる確率 p_{ij} をそれぞれ求めよ．

(3) 最初の状態から n 回移動したとき，F_0 の状態にかえっている確率 q_n を求めよ．

問題は，このページで終わりである。