

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1986年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

すべては 0 でない n 個の実数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ があり, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ かつ $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ を満たすとき, $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n > 0$ が成り立つことを証明せよ.

第 2 問

座標空間において、平面 $z = 1$ 上に一辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。点 A, B, C から平面 $z = 0$ におろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とする。動点 P は A から B の方向へ出発し、一定の速さで $\triangle ABC$ の周を一周する。動点 Q は同時に E から F の方向へ出発し、 P と同じ一定の速さで $\triangle DEF$ の周を一周する。線分 PQ が通過してできる曲面と $\triangle ABC, \triangle DEF$ によって囲まれる立体を V とする。

- (1) 平面 $z = a$ ($0 \leq a \leq 1$) による V の切り口はどのような図形か。
- (2) V の体積を求めよ。

第 3 問

座標平面の原点を O とし, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする. また α, β は 2 つの実数とする. 任意の点 P に対しベクトル $\overrightarrow{OP}$ の $\overrightarrow{OA}$ への正射影を $\overrightarrow{OP_1}$ (すなわち点 P_1 は P から O と A を通る直線へおろした垂線の足), $\overrightarrow{OP}$ の $\overrightarrow{OB}$ への正射影を $\overrightarrow{OP_2}$ とし, 一次変換 $f_{\alpha, \beta}$ を $f_{\alpha, \beta}(\overrightarrow{OP}) = \alpha \overrightarrow{OP_1} + \beta \overrightarrow{OP_2}$ によって定める.

一次変換 g がどのような α, β に対しても $f_{\alpha, \beta} \circ g = g \circ f_{\alpha, \beta}$ ($\circ$ は変換の合成を表す) となるための必要十分条件は, ある α', β' に対して $g = f_{\alpha', \beta'}$ となることである. これを証明せよ.

第 4 問

同一平面上に 2 つの三角形 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ があり, それぞれの外接円の半径は共に 1 であるとする. この 2 つの外接円の中心を結ぶ線分の中点を M , 線分 AA' , BB' , CC' の中点をそれぞれ P , Q , R とする.

- (1) $MP \leq 1$, $MQ \leq 1$, $MR \leq 1$ となることを示せ.
- (2) もし $\triangle PQR$ が鋭角三角形でその外接円の半径が 1 となるならば, 点 M はこの外接円の中心と一致することを示せ. さらにこのとき $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\triangle PQR$ はすべて合同となることを示せ.

第 5 問

n 個のサイコロを同時にふり、出た目の数のうちの最大のものを M_n 、最小のものを m_n とする.

- (1) $1 \leq i \leq j \leq 6$ を満たす整数 i, j に対して $M_n = j$ かつ $m_n = i$ となる確率 $P(M_n = j, m_n = i)$ を n, i, j で表せ.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{M_n}{m_n}\right)$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} V\left(\frac{M_n}{m_n}\right)$ を求めよ. (一般に確率変数 X に対して $E(X)$ はその平均, $V(X)$ はその分散を表す.)

第 6 問

$0 < r < 1$ となる実数 r に対し、点 $O = (0, 0)$ を中心とし半径が r の円を C とする．円 C' は中心が $O' = (1, 0)$ で円 C と異なる 2 点 P, Q で交わり、 $OP \perp O'P$ となるものとする．円 C の内部を D 、円 C' の内部を D' 、四辺形 $OPO'Q$ の内部を D'' と表す． r を $0 < r < 1$ の範囲で変化させるとき、 D'' から交わり $D \cap D'$ を除いた部分の面積の最大値を求めよ．