

# 入学試験過去問題

## 数 学

京都大学（理系）

対象年度：1985 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：200 点

## 第 1 問

実数  $p, q$  ( $q > 0$ ) に対して, 下の 2 条件 (1), (2) を満たす三角形 ABC が存在するための必要十分条件を求めよ.

(1)  $|\overrightarrow{BC}| = q$

(2)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = p$

ただし,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  は  $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{AC}$  の内積をあらわす.

## 第 2 問

平面上の 3 点  $A, B, C$  と 1 次変換  $f$  について, 下の 3 条件 (1), (2), (3) を仮定する.

- (1)  $A, B, C$  は同一直線上にはなく, また原点  $O$  は三角形  $ABC$  の内部には属さない.
- (2) 3 点  $A, B, C$  の  $f$  による像は, 全体として, 3 点  $A, B, C$  に一致する, すなわち
$$\{f(A), f(B), f(C)\} = \{A, B, C\}$$
- (3)  $f$  は恒等変換ではない, すなわち  $f \neq E$

このとき, 3 点  $A, B, C$  のうち  $f$  によって動かないものは, 1 つあって, 1 つに限ることを示せ.

### 第 3 問

$b, c$  は実数とし,  $x^2 + 2bx + c = 0$  の 2 根を  $\alpha, \beta$  とする.

- (1)  $b^2 - c < 0, b \neq 0$  とすれば, いかなる複素数  $\gamma$  に対しても  $\gamma = t\alpha + u\beta$  となる実数  $t, u$  が存在することを示せ.
- (2)  $f(x) = x^2 + 2(b-1)x + 5 - c$  とおくとき, 次の条件 (\*) を満たす点  $(b, c)$  全体の集合  $D$  を決定し, 図示せよ.

(\*)  $t, u$  がともに実数なら,  $f(t\alpha + u\beta) \neq 0$

## 第 4 問

実数  $r$  ( $r > 0$ ) に対して, 下の方程式 (1) の定める球面と, (2) の定める平面の共通部分を  $D$  とする.

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}(r^2 + 2)$$

$$(2) \quad x + y + z = r$$

(i) 点  $P, Q$  がともに  $D$  に属すれば,  $|\overrightarrow{PQ}| \leq 2\sqrt{\frac{2}{3}}$  が成立つことを示せ.

(ii)  $r$  が自然数のとき, 連立方程式 (1), (2) の整数解を決定せよ.

## 第 5 問

2 枚の硬貨があり、1 枚ずつ投げたとき表の出る確率をそれぞれ  $a, b$  とする. 2 枚同時に投げたとき、表の出た硬貨の枚数を  $X$  とする. 従って、確率変数  $X$  は値  $0, 1, 2$  をとり、その確率分布は  $a, b$  により定まる. 逆に  $X$  の分布を指定したとき、その分布を与えるような  $a, b$  の値が存在するかどうか、また存在する場合には、どれだけあるか、次の 2 つの場合について答えよ.

(1)  $X$  は 2 項分布, すなわち  $P(X = k) = {}_2C_k p^k (1 - p)^{2-k}$  ( $k = 0, 1, 2$ )

ただし  $p$  ( $0 < p < 1$ ) はあらかじめ指定した定数である.

(2)  $X$  は一様分布, すなわち  $P(X = k) = \frac{1}{3}$  ( $k = 0, 1, 2$ )

## 第 6 問

定数  $a$  ( $a \geq 0$ ) および  $b$  が与えられている.  $x \geq 0$  で定義された関数  $y = f(x)$  で, 下の 2 条件 (1), (2) を満たすものを決定せよ.

(1)  $f(x)$  は  $x \geq 0$  で連続,  $x > 0$  で微分可能

(2)  $b \int_a^x f(t) dt = xf(x)$