

1985年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

実数 p, q ($q > 0$) に対して, 下の 2 条件 (1), (2) を満たす三角形 ABC が存在するための必要十分条件を求めよ.

$$(1) \quad |\overrightarrow{BC}| = q$$

$$(2) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = p$$

ただし, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積をあらわす.

2

(30 点)

平面上の 3 点 A, B, C と 1 次変換 f について, 下の 3 条件 (1), (2), (3) を仮定する.

(1) A, B, C は同一直線上にはなく, また原点 O は三角形 ABC の内部には属さない.

(2) 3 点 A, B, C の f による像は, 全体として, 3 点 A, B, C に一致する, すなわち $\{f(A), f(B), f(C)\} = \{A, B, C\}$

(3) f は恒等変換ではない, すなわち $f \neq E$

このとき, 3 点 A, B, C のうち f によって動かないものは, 1 つあって, 1 つに限ることを示せ.

3

(35 点)

b, c は実数とし, $x^2 + 2bx + c = 0$ の 2 根を α, β とする.

(1) $b^2 - c < 0$, $b \neq 0$ とすれば, いかなる複素数 γ に対しても $\gamma = t\alpha + u\beta$ となる実数 t, u が存在することを示せ.

(2) $f(x) = x^2 + 2(b-1)x + 5 - c$ とおくとき, 次の条件 (*) を満たす点 (b, c) 全体の集合 D を決定し, 図示せよ.

(*) t, u がともに実数なら, $f(t\alpha + u\beta) \neq 0$

4

(35 点)

実数 r ($r > 0$) に対して, 下の方程式 (1) の定める球面と, (2) の定める平面の共通部分を D とする.

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}(r^2 + 2)$$

$$(2) \quad x + y + z = r$$

(i) 点 P, Q がともに D に属すれば, $|\overrightarrow{PQ}| \leq 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ が成立つことを示せ.

(ii) r が自然数のとき, 連立方程式 (1), (2) の整数解を決定せよ.

5

(35 点)

2 枚の硬貨があり, 1 枚ずつ投げたとき表の出る確率をそれぞれ a, b とする. 2 枚同時に投げたとき, 表の出た硬貨の枚数を X とする. 従って, 確率変数 X は値 0, 1, 2 をとり, その確率分布は a, b により定まる. 逆に X の分布を指定したとき, その分布を与えるような a, b の値が存在するかどうか, また存在する場合には, どれだけあるか, 次の 2 つの場合について答えよ.

$$(1) \quad X \text{ は 2 項分布, すなわち } P(X = k) = {}_2C_k p^k (1 - p)^{2-k} \quad (k = 0, 1, 2)$$

ただし p ($0 < p < 1$) はあらかじめ指定した定数である.

$$(2) \quad X \text{ は一様分布, すなわち } P(X = k) = \frac{1}{3} \quad (k = 0, 1, 2)$$

6

(35 点)

定数 a ($a \geq 0$) および b が与えられている. $x \geq 0$ で定義された関数 $y = f(x)$ で, 下の 2 条件 (1), (2) を満たすものを決定せよ.

(1) $f(x)$ は $x \geq 0$ で連続, $x > 0$ で微分可能

$$(2) \quad b \int_a^x f(t) dt = xf(x)$$

問題は, このページで終わりである。

