

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1984年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

方程式 $xy = 1$ によって与えられる双曲線を C とし, また次のように, 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定義される 1 次変換を f とする.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1 次変換 f が双曲線 C を C 自身の上へ写すための (a, b, c, d についての) 必要十分条件を求めよ.

第 2 問

定数 c ($c \neq 0$) に対して、等式 $f(x+c) = f(x)$ がすべての x について成り立つとき、関数 $f(x)$ は周期関数であるといい、またこの等式を満たすような正の数 c のうちの最小値を $f(x)$ の周期という。

次の関数は周期関数であるか否かを、理由をつけて答えよ。また、周期関数である場合には、その周期を求めよ。

(1) $f(x) = \sin(\sin x)$

(2) $f(x) = \cos(\sin x)$

(3) $f(x) = \sin(x^3)$

第 3 問

実数 t の値によって定まる点 $P(t+1, t)$ と $Q(t-1, -t)$ がある.

- (1) t がすべての実数を動くとき, 直線 PQ が通過する範囲を図示せよ.
- (2) t が区間 $[0, 1] = \{t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ を動くとき, 線分 PQ が通過する範囲の面積を求めよ.

第 4 問

空間に三角形 ABC があるとし、空間の原点 O は、この三角形が決定する平面上にはないとする。

- (1) 実数 u, v, w が、等式 $u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB} + w\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ を満たすならば、 $u = v = w = 0$ であることを示せ。
- (2) 辺 BC, CA, AB の長さを、それぞれ a, b, c とし、三角形 ABC の内接円の中心を P とすると、等式 $\overrightarrow{OP} = u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB} + w\overrightarrow{OC}$ が成立するという。 u, v, w を a, b, c を用いて表せ。

第 5 問

つぼの中に r 個 ($r \geq 1$) の赤球と, s 個 ($s \geq 0$) の白球が入っている. A と B の 2 人が, 交互に球を 1 個ずつとり出し, 先に赤球をとり出した者を勝者とするゲームをする. ただし, とり出した球は, もとにもどさないものとする.

- (1) ちょうど i 回目 (すなわち A, B 2 人のとり出した球の合計が, ちょうど i 個になった時) に勝者がきまる確率を P_i とするとき, $P_i \geq P_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots$) となることを示せ.
- (2) このゲームを A からはじめるとする. 任意の r, s に対して, A が勝者となる確率は, $\frac{1}{2}$ またはそれ以上であることを示せ. また, A が勝者となる確率が $\frac{1}{2}$ となるための, r と s の条件を求めよ.

第 6 問

区間 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ で定義された関数 $f(x)$ について、次のことを仮定する.

- (イ) 関数 $f(x)$ は連続であり, 更に $f(x)$ およびその導関数 $f'(x)$ について, 微分と積分を自由に行うことができる.
- (ロ) 区間 $[a, b]$ で, つねに不等式 $a \leq f(x) \leq b$ が成り立つ.
- (ハ) 区間 $[a, b]$ でつねに不等式 $|f'(x)| \leq k < 1$ が成り立つような定数 k が存在する.

このとき, 次の問に答えよ.

- (1) 等式 $f(c_0) = c_0$ を満たす値 c_0 が, 区間 $[a, b]$ の中に, ただ 1 つ存在することを, 簡単に説明せよ.
- (2) 区間 $[a, b]$ の中の (任意の) 1 つの値 d_0 から出発して, $d_1 = f(d_0)$, $d_{n+1} = f(d_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく. このとき, 不等式 $|d_n - c_0| \leq k^n |d_0 - c_0|$ ($n = 1, 2, \dots$) が成立することを示せ. ただし, c_0 は問 (1) に述べられている値とする.