

1984年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

方程式 $xy = 1$ によって与えられる双曲線を C とし, また次のように, 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定義される 1 次変換を f とする.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1 次変換 f が双曲線 C を C 自身の上へ写すための (a, b, c, d) についての必要十分条件を求めよ.

2

(30 点)

定数 c ($c \neq 0$) に対して, 等式 $f(x+c) = f(x)$ がすべての x について成り立つとき, 関数 $f(x)$ は周期関数であるといい, またこの等式を満たすような正の数 c のうちの最小値を $f(x)$ の周期という.

次の関数は周期関数であるか否かを, 理由をつけて答えよ. また, 周期関数である場合には, その周期を求めよ.

(1) $f(x) = \sin(\sin x)$

(2) $f(x) = \cos(\sin x)$

(3) $f(x) = \sin(x^3)$

3

(35 点)

実数 t の値によって定まる点 $P(t+1, t)$ と $Q(t-1, -t)$ がある.

(1) t がすべての実数を動くとき, 直線 PQ が通過する範囲を図示せよ.

(2) t が区間 $[0, 1] = \{t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ を動くとき, 線分 PQ が通過する範囲の面積を求めよ.

4

(35 点)

空間に三角形 ABC があるとし、空間の原点 O は、この三角形が決定する平面上にはないとする.

- (1) 実数 u, v, w が、等式 $u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB} + w\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ を満たすならば、 $u = v = w = 0$ であることを示せ.
- (2) 辺 BC, CA, AB の長さを、それぞれ a, b, c とし、三角形 ABC の内接円の中心を P とすると、等式 $\overrightarrow{OP} = u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB} + w\overrightarrow{OC}$ が成立するという. u, v, w を a, b, c を用いて表せ.

5

(35 点)

つぼの中に r 個 ($r \geq 1$) の赤球と、 s 個 ($s \geq 0$) の白球が入っている. A と B の 2 人が、交互に球を 1 個ずつとり出し、先に赤球をとり出した者を勝者とするゲームをする. ただし、とり出した球は、もとにもどさないものとする.

- (1) ちょうど i 回目 (すなわち A, B 2 人のとり出した球の合計が、ちょうど i 個になった時) に勝者がきまる確率を P_i とするとき、 $P_i \geq P_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots$) となることを示せ.
- (2) このゲームを A から始めるとする. 任意の r, s に対して、 A が勝者となる確率は、 $\frac{1}{2}$ またはそれ以上であることを示せ. また、 A が勝者となる確率が $\frac{1}{2}$ となるための、 r と s の条件を求めよ.

区間 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ で定義された関数 $f(x)$ について、次のことを仮定する.

- (イ) 関数 $f(x)$ は連続であり, 更に $f(x)$ およびその導関数 $f'(x)$ について, 微分と積分を自由に行うことができる.
- (ロ) 区間 $[a, b]$ で, つねに不等式 $a \leq f(x) \leq b$ が成り立つ.
- (ハ) 区間 $[a, b]$ でつねに不等式 $|f'(x)| \leq k < 1$ が成り立つような定数 k が存在する.

このとき, 次の問に答えよ.

- (1) 等式 $f(c_0) = c_0$ を満たす値 c_0 が, 区間 $[a, b]$ の中に, ただ 1 つ存在することを, 簡単に説明せよ.
- (2) 区間 $[a, b]$ の中の (任意の) 1 つの値 d_0 から出発して, $d_1 = f(d_0)$, $d_{n+1} = f(d_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく. このとき, 不等式 $|d_n - c_0| \leq k^n |d_0 - c_0|$ ($n = 1, 2, \dots$) が成立することを示せ. ただし, c_0 は問 (1) に述べられている値とする.

問題は, このページで終わりである。

