

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1983年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

A, B, C の 3 高校が野球の試合をする．まず 2 校が対戦して，勝った方が残りの 1 校と対戦する．これをくりかえして，2 連勝した高校が優勝する．A 校が B, C 校に勝つ確率をそれぞれ p , q とし，B 校が C 校に勝つ確率を $\frac{1}{2}$ とする．次の確率を，それぞれ求めよ．ただし， $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ とする．

- (1) 第 1 戦に A 校と B 校が対戦した場合，A 校が B 校に勝って優勝する確率．
- (2) 第 1 戦に A 校と B 校が対戦した場合，A 校が B 校に負けて優勝する確率．
- (3) 第 1 戦に B 校と C 校が対戦した場合，A 校が優勝する確率．

第 2 問

$\angle A = 90^\circ$ である直角三角形 ABC がある．頂点 B, C をそれぞれ始点として，辺 BC に垂直な半直線 l, m を頂点 A のある側にひく．つぎに辺 BC 上の任意の点 P より AB, AC に垂線をひき，この延長が l, m と交わる点をそれぞれ Q, R とする．

- (1) 3 点 Q, A, R は一直線上にあることを示せ．
- (2) 台形 $BCRQ$ の面積が三角形 ABC の面積の 2 倍になるとき，この台形の形を求めよ．ただし， $AB \neq AC$ とする．

第 3 問

$ab + cd = 0$, $ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d のつくる行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がある.

ただし, a, c は負ではないとする.

(1) $A = \begin{pmatrix} v \cos \theta & -v \sin \theta \\ v \sin \theta & v \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ と表されることを示せ. ただし, u, v, θ は実数で, $v > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする.

(2) O を原点とする座標平面上の 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について, 長さ 1 のベクトル $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から, ベクトル $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ への角度を γ ($-\pi < \gamma \leq \pi$) とする (したがって, 半直線 OP を角度 γ だけ回転すれば半直線 OP' となる). (x, y) が $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1$ の範囲を動いたとき, γ を最大にする $\overrightarrow{OP}$ を求めよ. ただし, $0 < u < 1$ とする.

第 4 問

3つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ はたがいに直交している. 点 O より直線 BC, CA, AB に垂線をひき, その交点をそれぞれ P, Q, R とする.

- (1) 四面体 OPQR の四面体 OABC に対する体積比を, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ の長さ a , b , c で表せ.
- (2) 四面体 OPQR の体積は四面体 OABC の体積の $\frac{1}{4}$ 以下であることを示せ.

第 5 問

xy 平面上に動点 P , Q がある. Q は時刻 0 のとき点 $(0, -b)$ にあり ($b > 0$), 速さ 1 で y 軸上を正の向きに進む. 他方 P は時刻 0 のとき x 軸上の点 $(-a, 0)$ にあり ($a > 0$), 速さ 1 で x 軸上を正の向きに進み, ある時刻 t (≥ 0) で向きを変え, 速さを $\sqrt{2}$ に変更して Q に到達するように直進するものとする. 時刻 t から到達する時刻までの時間が最小になるような t を求めよ. ただし, $0 < a < b$ とする.

第 6 問

内側が直円すい形の容器がある．その回転軸は鉛直で，頂点が最低点，深さは h で，上面は半径 R の円である．この容器に上面まで満たされた水を，断面積が S の管を通じて，最低点からポンプで流出させるとする．水の流出速度 v は，そのときの水面の高さを x とすれば， $v = kx$ (k は正の定数) で与えられるようにポンプが調整されているものとする．流出し始めた時刻を $t = 0$ として，時刻 t における水面の高さ $x(t)$ を求めよ．ただし， t は容器がからになる時刻までに限定する．(時刻 t と $t + \Delta t$ の間に流出する水量を ΔQ とすれば， $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Sv$ がなりたつ.)