

1983年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

A, B, C の 3 高校が野球の試合をする. まず 2 校が対戦して, 勝った方が残りの 1 校と対戦する. これをくりかえして, 2 連勝した高校が優勝する. A 校が B, C 校に勝つ確率をそれぞれ p, q とし, B 校が C 校に勝つ確率を $\frac{1}{2}$ とする. 次の確率を, それぞれ求めよ. ただし, $0 < p < 1, 0 < q < 1$ とする.

- (1) 第 1 戦に A 校と B 校が対戦した場合, A 校が B 校に勝って優勝する確率.
- (2) 第 1 戦に A 校と B 校が対戦した場合, A 校が B 校に負けて優勝する確率.
- (3) 第 1 戦に B 校と C 校が対戦した場合, A 校が優勝する確率.

2

(30 点)

$\angle A = 90^\circ$ である直角三角形 ABC がある. 頂点 B, C をそれぞれ始点として, 辺 BC に垂直な半直線 l, m を頂点 A のある側にひく. つぎに辺 BC 上の任意の点 P より AB, AC に垂線をひき, この延長が l, m と交わる点をそれぞれ Q, R とする.

- (1) 3 点 Q, A, R は一直線上にあることを示せ.
- (2) 台形 BCRQ の面積が三角形 ABC の面積の 2 倍になるとき, この台形の形を求めよ. ただし, $AB \neq AC$ とする.

3

(35 点)

$ab + cd = 0$, $ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d のつくる行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が

ある. ただし, a, c は負ではないとする.

(1) $A = \begin{pmatrix} v \cos \theta & -v \sin \theta \\ v \sin \theta & v \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ と表されることを示せ. ただし, u, v, θ は実数で, $v > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする.

(2) O を原点とする座標平面上の 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について, 長さ 1 のベ

クトル $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から, ベクトル $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ への角度を γ ($-\pi < \gamma \leq \pi$)

とする (したがって, 半直線 OP を角度 γ だけ回転すれば半直線 OP' となる).

(x, y) が $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1$ の範囲を動いたとき, γ を最大にする $\overrightarrow{OP}$ を求めよ. ただし, $0 < u < 1$ とする.

4

(35 点)

3 つのベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ はたがいに直交している. 点 O より直線 BC, CA, AB に垂線をひき, その交点をそれぞれ P, Q, R とする.

(1) 四面体 $OPQR$ の四面体 $OABC$ に対する体積比を, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ の長さ a, b, c で表せ.

(2) 四面体 $OPQR$ の体積は四面体 $OABC$ の体積の $\frac{1}{4}$ 以下であることを示せ.

5

(35 点)

xy 平面上に動点 P, Q がある. Q は時刻 0 のとき点 $(0, -b)$ にあり ($b > 0$), 速さ 1 で y 軸上を正の向きに進む. 他方 P は時刻 0 のとき x 軸上の点 $(-a, 0)$ にあり ($a > 0$), 速さ 1 で x 軸上を正の向きに進み, ある時刻 $t (\geq 0)$ で向きを変え, 速さを $\sqrt{2}$ に変更して Q に到達するように直進するものとする. 時刻 t から到達する時刻までの時間が最小になるような t を求めよ. ただし, $0 < a < b$ とする.

6

(35 点)

内側が直円すい形の容器がある. その回転軸は鉛直で, 頂点が最低点, 深さは h で, 上面は半径 R の円である. この容器に上面まで満たされた水を, 断面積が S の管を通じて, 最低点からポンプで流出させるとする. 水の流出速度 v は, そのときの水面の高さを x とすれば, $v = kx$ (k は正の定数) で与えられるようにポンプが調整されているものとする. 流出し始めた時刻を $t = 0$ として, 時刻 t における水面の高さ $x(t)$ を求めよ. ただし, t は容器がからになる時刻までに限定する. (時刻 t と $t + \Delta t$ の間に流出する水量を ΔQ とすれば, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Sv$ がなりたつ.)

問題は、このページで終わりである。

