

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1982年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

C を $y = x^3 + ax$ のグラフ, P を原点と異なる C 上の点とする.

- (1) 点 P における曲線 C の接線は, P と異なる点 Q で C と交わることを示せ.
- (2) 曲線 C と線分 PQ で囲まれた部分は, y 軸 $x = 0$ によって, どのような面積の比に分けられるか.

第 2 問

次の性質をもつ実数 a は, どのような範囲にあるか.

二次方程式 $t^2 - 2at + 3a - 2 = 0$ は実根 α, β をもち, $\alpha \geq \beta$ とするとき, 不等式 $y \leq x, y \geq -x, ay \geq 3(x - \beta)$ で定まる領域は, 三角形になる.

第 3 問

平面上に四辺形 $ABCD$ があって、どの頂点も、残りの頂点で作る三角形の外部にある。 $\triangle BCD$ の重心を A_1 、 $\triangle CDA$ の重心を B_1 、 $\triangle DAB$ の重心を C_1 、 $\triangle ABC$ の重心を D_1 として、四辺形 $A_1B_1C_1D_1$ を作る。これを 1 回目とし、同様の手続きをくり返して、 n 回目にえられる四辺形を $A_nB_nC_nD_n$ とする。

このとき、次のことを示せ。

- (1) 線分 AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 は 1 点 P を共有する。
- (2) 点 A_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は 1 直線上にある。
- (3) A_n と P の距離 A_nP について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_nP = 0$ である。

第 4 問

$0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z$ で定まる空間の部分を A とし, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ で定まる立方体を C とする. t が $0 < t < 3$ の範囲で動くとき, 平面 $x + y + z = t$ による, A および C の切り口の面積を, それぞれ $T(t)$ および $S(t)$ とする.

- (1) $T(t)$ を求めよ.
- (2) $S(t)$ の最大値を求めよ.

第 5 問

校庭に，南北の方向に 1 本の白線が引いてある．ある人が，白線上の A 点から西へ 5 メートルの点に立ち，銅貨を投げて，表が出たときは東へ 1 メートル進み，裏が出たときは北へ 1 メートル進む．白線に達するまで，これを続ける．

- (1) A 点から n メートル北の点に到達する確率 p_n を求めよ．
- (2) p_n を最大にする n を求めよ．

第 6 問

関数 $f(x) = \int_x^{x+1} te^{-|t|} dt$ について、次の問に答えよ.

- (1) $-1 \leq x \leq 0$ のとき, $f(-1) \leq f(x) \leq f(0)$ であることを示せ.
- (2) $f(x)$ が最大および最小となる x の値をそれぞれ求めよ.