

1982年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

C を $y = x^3 + ax$ のグラフ, P を原点と異なる C 上の点とする.

- (1) 点 P における曲線 C の接線は, P と異なる点 Q で C と交わることを示せ.
- (2) 曲線 C と線分 PQ で囲まれた部分は, y 軸 $x = 0$ によって, どのような面積の比に分けられるか.

2

(30 点)

次の性質をもつ実数 a は, どのような範囲にあるか.

二次方程式 $t^2 - 2at + 3a - 2 = 0$ は実根 α, β をもち, $\alpha \geq \beta$ とするとき, 不等式 $y \leq x, y \geq -x, ay \geq 3(x - \beta)$ で定まる領域は, 三角形になる.

3

(35 点)

平面上に四辺形 $ABCD$ があって, どの頂点も, 残りの頂点の作る三角形の外部にある. $\triangle BCD$ の重心を A_1 , $\triangle CDA$ の重心を B_1 , $\triangle DAB$ の重心を C_1 , $\triangle ABC$ の重心を D_1 として, 四辺形 $A_1B_1C_1D_1$ を作る. これを 1 回目とし, 同様の手続きをくり返して, n 回目になれる四辺形を $A_nB_nC_nD_n$ とする.

このとき, 次のことを示せ.

- (1) 線分 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 は 1 点 P を共有する.
- (2) 点 A_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は 1 直線上にある.
- (3) A_n と P の距離 A_nP について, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_nP = 0$ である.

4

(35 点)

$0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z$ で定まる空間の部分を A とし, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ で定まる立方体を C とする. t が $0 < t < 3$ の範囲で動くとき, 平面 $x + y + z = t$ による, A および C の切り口の面積を, それぞれ $T(t)$ および $S(t)$ とする.

- (1) $T(t)$ を求めよ.
- (2) $S(t)$ の最大値を求めよ.

5

(35 点)

校庭に, 南北の方向に 1 本の白線が引いてある. ある人が, 白線上の A 点から西へ 5 メートルの点に立ち, 銅貨を投げて, 表が出たときは東へ 1 メートル進み, 裏が出たときは北へ 1 メートル進む. 白線に達するまで, これを続ける.

- (1) A 点から n メートル北の点に到達する確率 p_n を求めよ.
- (2) p_n を最大にする n を求めよ.

6

(35 点)

関数 $f(x) = \int_x^{x+1} te^{-|t|} dt$ について, 次の問に答えよ.

- (1) $-1 \leq x \leq 0$ のとき, $f(-1) \leq f(x) \leq f(0)$ であることを示せ.
- (2) $f(x)$ が最大および最小となる x の値をそれぞれ求めよ.

問題は, このページで終わりである。

