

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1981年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

座標平面上で、点 $(4, 5)$ を通る直線が放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ と 2 点 P, Q で交わっているとき、線分 PQ の長さが最小となるような直線の傾きと、そのときの線分 PQ の長さを求めよ.

第 2 問

空間の、同一平面上にない 4 点 O, A, B, C を考える. 線分 OA, AB, BC, CO の上にそれぞれ点 P_1, P_2, P_3, P_4 があって $P_1P_2P_3P_4$ が平行四辺形をなすものとする. このとき次の問いに答えよ.

- (1) $|\overrightarrow{OP_1}| : |\overrightarrow{P_1A}| = k : (1-k), |\overrightarrow{AP_2}| : |\overrightarrow{P_2B}| = (1-l) : l, |\overrightarrow{BP_3}| : |\overrightarrow{P_3C}| = m : (1-m), |\overrightarrow{CP_4}| : |\overrightarrow{P_4O}| = (1-n) : n$ とすれば, $k = l = m = n$ であることを示せ. ただし, $|\quad|$ はベクトルの大きさを表す.
- (2) 平行四辺形 $P_1P_2P_3P_4$ の対角線の交点は, 線分 OB, AC のそれぞれの中点を結ぶ線分上にあることを示せ.

第 3 問

k は定数, m は一つの自然数とする.

$x > 0$ のとき, つねに $x^m - 1 \leq k(x^{m+1} - 1)$ であるならば, $k = \frac{m}{m+1}$ であることを示せ.

第 4 問

- (1) 四面体 PQRS が, $\angle PQR = \angle RQS = \angle SQP = 90^\circ$ および $PR = PS = a$ (定数) をみたすとき, このような四面体の体積の最大値を求めよ.
- (2) 四面体 ABCD が, $AB = BC = CD = DA = a$ (定数) をみたすとき, このような四面体の体積の最大値を求めよ.

第 5 問

A 君がおみくじを引く． N 回引いても「大吉」が出なければ打ち切ってやめる．もし N 回までに大吉が出ればその回でやめることにした．ただし， N は 2 以上の定まった自然数とする．

A 君が 1 回ごとに大吉を引く確率を p とする．このとき A 君がおみくじを引くのをやめるまでの回数の期待値（平均ともいう） E は

$$E = \frac{1 - (1 - p)^N}{p}$$

と表されることを示し， $p = \frac{1}{5}$ ， $N = 10$ のときの E の値を小数第 2 位まで求めよ．

第 6 問

次の不等式を証明せよ．ただし， e は自然対数の底である．

(1) $0 < a \leq x$ のとき

$$\int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \frac{1}{a} e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(2) $3 < b$ のとき

$$\int_3^b e^{-\frac{t^2}{2}+2t} dt < e^{\frac{3}{2}}$$