

1981年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

座標平面上で、点 $(4, 5)$ を通る直線が放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ と 2 点 P, Q で交わっているとき、線分 PQ の長さが最小となるような直線の傾きと、そのときの線分 PQ の長さを求めよ。

2

(30 点)

空間の、同一平面上にない 4 点 O, A, B, C を考える。線分 OA, AB, BC, CO の上にそれぞれ点 P_1, P_2, P_3, P_4 があって $P_1P_2P_3P_4$ が平行四辺形をなすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $|\overrightarrow{OP_1}| : |\overrightarrow{P_1A}| = k : (1 - k), |\overrightarrow{AP_2}| : |\overrightarrow{P_2B}| = (1 - l) : l, |\overrightarrow{BP_3}| : |\overrightarrow{P_3C}| = m : (1 - m), |\overrightarrow{CP_4}| : |\overrightarrow{P_4O}| = (1 - n) : n$ とすれば、 $k = l = m = n$ であることを示せ。ただし、 $|\quad|$ はベクトルの大きさを表す。

(2) 平行四辺形 $P_1P_2P_3P_4$ の対角線の交点は、線分 OB, AC のそれぞれの中点を結ぶ線分上にあることを示せ。

3

(35 点)

k は定数、 m は一つの自然数とする。

$x > 0$ のとき、つねに $x^m - 1 \leq k(x^{m+1} - 1)$ であるならば、 $k = \frac{m}{m+1}$ であることを示せ。

4

(35 点)

- (1) 四面体 PQRS が, $\angle PQR = \angle RQS = \angle SQP = 90^\circ$ および $PR = PS = a$ (定数) をみたすとき, このような四面体の体積の最大値を求めよ.
- (2) 四面体 ABCD が, $AB = BC = CD = DA = a$ (定数) をみたすとき, このような四面体の体積の最大値を求めよ.

5

(35 点)

A 君がおみくじを引く. N 回引いても「大吉」が出なければ打ち切ってやめる. もし N 回までに大吉が出ればその回でやめることにした. ただし, N は 2 以上の定まった自然数とする.

A 君が 1 回ごとに大吉を引く確率を p とする. このとき A 君がおみくじを引くのをやめるまでの回数の期待値 (平均ともいう) E は

$$E = \frac{1 - (1 - p)^N}{p}$$

と表されることを示し, $p = \frac{1}{5}$, $N = 10$ のときの E の値を小数第 2 位まで求めよ.

6

(35 点)

次の不等式を証明せよ. ただし, e は自然対数の底である.

- (1) $0 < a \leq x$ のとき

$$\int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \frac{1}{a} e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- (2) $3 < b$ のとき

$$\int_3^b e^{-\frac{t^2}{2} + 2t} dt < e^{\frac{3}{2}}$$

問題は, このページで終わりである。

