

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1980年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ だけを使い, 乗法で得られる行列 (A , B いずれも何回も使ってよい) 全部を求めよ.

第 2 問

放物線 $y = ax^2 + bx$ で、次の性質をもつものを考える.

- ① $a < 0, b > 0$
- ② 放物線の頂点は直線 $y = -2x + 5$ 上にある

このような放物線のうち、それと x 軸とが囲む面積が最大になるのは、 b がどのような値をとるときか. また、そのときの面積を求めよ.

第 3 問

空間の 3 点 A, B, C の組で、次の条件をみたすものを考える。

- ① A, B, C は平面 $x + y + z = 1$ 上にある。
- ② A の座標が (l, m, n) であれば、 B, C の座標はそれぞれ $(m, n, l), (n, l, m)$ である。
- ③ ベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は直交する (ただし、 $O = (0, 0, 0)$)。

このとき、そのような A, B, C のとりかたに関せず次の 3 つが成り立つことを示せ。

- (1) A, B, C は定円上にある。
- (2) 四面体 $OABC$ の体積は一定である。
- (3) BC, CA, AB, OA, OB, OC の中点をそれぞれ L, M, N, P, Q, R とすれば、6 点 L, M, N, P, Q, R は定球面上にある。

第 4 問

次のようなゲームがある.

- ① 最初の持ち点は 2 である.
- ② サイコロをふって, 奇数の目が出れば持ち点が 1 点増し, 偶数の目が出れば持ち点が 1 点減る. このような操作を 5 回する. ただし途中で持ち点が 0 になったら, その時点でゲームは終了する.

このゲームについて, 5 回サイコロをふることができる確率, およびゲームが終った時の持ち点の期待値を求めよ.

第 5 問

互いに異なる n 個 ($n \geq 3$) の実数の集合 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ が次の性質をもつという.

「 S から相異なる要素 a_i, a_j をとれば $a_i - a_j, a_j - a_i$ の少くとも一方は必ず S に属する」

このとき,

(1) 次の 2 つのうちのいずれか一方が成り立つことを示せ.

(イ) $a_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

(ロ) $a_i \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

(2) $a_1, a_2, \dots, a_n$ の順序を適当に変えれば等差数列になることを示せ.

第 6 問

0, 1 のいずれとも異なる 2 整数 a, b ($a \neq b$) を考え, $f(x) = x(x-1)(x-a)(x-b) + 1$ とおく. $g(x), h(x)$ が整数係数の多項式で $f(x) = g(x)h(x)$ であると仮定する.

このとき,

- (1) $g(0) = h(0)$ を示せ.
- (2) $g(x), h(x)$ のどちらも定数でないならば $g(x) = h(x)$ であることを示せ.
- (3) (2) の場合が起こるような a, b の例を 1 組求めよ.