

1980年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

2つの行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ だけを使い, 乗法で得られる行列 (A , B いずれも何回も使ってもよい) 全部を求めよ.

2

(30 点)

放物線 $y = ax^2 + bx$ で, 次の性質をもつものを考える.

- ① $a < 0$, $b > 0$
- ② 放物線の頂点は直線 $y = -2x + 5$ 上にある

このような放物線のうち, それと x 軸とが囲む面積が最大になるのは, b がどのような値をとるときか. また, そのときの面積を求めよ.

3

(35 点)

空間の3点 A , B , C の組で, 次の条件をみたすものを考える.

- ① A , B , C は平面 $x + y + z = 1$ 上にある.
- ② A の座標が (l, m, n) であれば, B , C の座標はそれぞれ (m, n, l) , (n, l, m) である.
- ③ ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ は直交する (ただし, $O = (0, 0, 0)$).

このとき, そのような A , B , C のとりかたに関せず次の3つが成り立つことを示せ.

- (1) A , B , C は定円上にある.
- (2) 四面体 $OABC$ の体積は一定である.
- (3) BC , CA , AB , OA , OB , OC の中点をそれぞれ L , M , N , P , Q , R とすれば, 6点 L , M , N , P , Q , R は定球面上にある.

4

(35 点)

次のようなゲームがある.

- ① 最初の持ち点は 2 である.
- ② サイコロをふって, 奇数の目が出れば持ち点が 1 点増し, 偶数の目が出れば持ち点が 1 点減る. このような操作を 5 回する. ただし途中で持ち点が 0 になったら, その時点でゲームは終了する.

このゲームについて, 5 回サイコロをふることができる確率, およびゲームが終了時の持ち点の期待値を求めよ.

5

(35 点)

互いに異なる n 個 ($n \geq 3$) の実数の集合 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ が次の性質をもつという.

「 S から相異なる要素 a_i, a_j をとれば $a_i - a_j, a_j - a_i$ の少くとも一方は必ず S に属する」

このとき,

- (1) 次の 2 つのうちのいずれか一方が成り立つことを示せ.

(イ) $a_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

(ロ) $a_i \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

- (2) $a_1, a_2, \dots, a_n$ の順序を適当に変えれば等差数列になることを示せ.

$0, 1$ のいずれとも異なる 2 整数 a, b ($a \neq b$) を考え, $f(x) = x(x-1)(x-a)(x-b)+1$ とおく. $g(x), h(x)$ が整数係数の多項式で $f(x) = g(x)h(x)$ であると仮定する.

このとき,

- (1) $g(0) = h(0)$ を示せ.
- (2) $g(x), h(x)$ のどちらも定数でないならば $g(x) = h(x)$ であることを示せ.
- (3) (2) の場合が起こるような a, b の例を 1 組求めよ.

問題は、このページで終わりである。

