

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1979年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

次の条件をみたして、かつ最高次の係数が 1 である x の整式 $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ を求めよ.

(1) $P_1(x)$ は 1 次式であって、どんな定数 C に対しても $\int_{-1}^1 P_1(x)C \, dx = 0$.

(2) $P_2(x)$ は 2 次式であって、1 次以下のどんな整式 $f(x)$ に対しても $\int_{-1}^1 P_2(x)f(x) \, dx = 0$.

(3) $P_3(x)$ は 3 次式であって、2 次以下のどんな整式 $f(x)$ に対しても $\int_{-1}^1 P_3(x)f(x) \, dx = 0$.

第 2 問

$f(x) = 1 + 2\cos x + 3\sin x$ とする. すべての x に対して $af(x) + bf(x-c) = 1$ が成り立つように, 定数 a, b, c を定めよ.

第 3 問

- (1) 変数 t が $t > 0$ の範囲を動くとき

$$f(t) = \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t + \frac{1}{t}} + 1, \quad g(t) = \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t + \frac{1}{t}} + 1$$

について, $f(t)$ の最小値は $2 + \sqrt{3}$, $g(t)$ の最大値は $2 - \sqrt{3}$ であることを示せ.

- (2) $a = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$, $b = p\sqrt{xy}$, $c = x + y$ とおく. 任意の正数 $x, y (> 0)$ に対して a, b, c を 3 辺の長さとする三角形がつねに存在するように, p の値の範囲を定めよ.

第 4 問

2 人の人が 1 つのサイコロを 1 回ずつふり、大きい目を出した方を勝ちとすることにした。ただし、このサイコロは必ずしも正しいものではなく、 k の目の出る確率は p_k である ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)。このとき

- (1) 引き分けになる確率 P を求めよ。
- (2) $P \geq \frac{1}{6}$ であることを示せ。また、 $P = \frac{1}{6}$ ならば $p_k = \frac{1}{6}$ である ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) ことを示せ。

第 5 問

中心が O である定円の周上に相異なる 6 つの定点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ がある. このとき

- (1) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OH}$ となるように点 H をとれば, 点 H は $\triangle A_1 A_2 A_3$ の垂心であることを示せ.
- (2) 6 点 A_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) のうちから 3 点を任意にえらぶ. えらんだ 3 点を頂点とする三角形の垂心と, 残りの 3 点を頂点とする三角形の重心とを通る直線は, 3 点のえらびかたに無関係な一定の点を通ることを示せ.

注 三角形の各頂点からその対辺にひいた 3 つの垂線は 1 点で交わる. この交点をその三角形の垂心という.

第 6 問

平面上に動点 P がある．時刻 t ($t \geq 0$) のときの P の座標 (x, y) は次の式で与えられる．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

ただし, a, b, c_1, c_2 は定数であって, $a > 0, b > 0$ であり, 定点 $C(c_1, c_2)$ は原点 $O(0, 0)$ とは異なるものとする．このとき

- (1) 動点 P の速度ベクトルと動径 OP とのなす角は一定であることを示せ．
- (2) 動点 P が C を出発したのち, 線分 OC と最初に交わる点を C_1 , 第 2 回目に交わる点を C_2 とする．一般に, 第 k 回目に OC と交わる点を C_k とする． P の経過した道のり $\widehat{CC_1}, \widehat{C_1C_2}, \dots, \widehat{C_kC_{k+1}}, \dots$ は等比数列であることを示せ．