

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1978年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

a, b, c を正の数とすると、不等式

$$2\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right) \leq 3\left(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}\right)$$

を証明せよ。また、等号が成立するのはどんな場合か。

第 2 問

$\triangle OAB$ の重心 G を通る直線が、辺 OA , OB とそれぞれ辺上の点 P , Q で交わっているとする. $\overrightarrow{OP} = h\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OB}$ とし, $\triangle OAB$, $\triangle OPQ$ の面積をそれぞれ S , T とすれば, 次の関係が成り立つことを示せ.

$$(1) \quad \frac{1}{h} + \frac{1}{k} = 3$$

$$(2) \quad \frac{4}{9}S \leq T \leq \frac{1}{2}S$$

第 3 問

放物線 $y = 4 - x^2$ と直線 $y = 3x$ との 2 交点を A, B とする. 点 P は放物線の弧の上を A から B まで動くものとし, $\triangle PAB$ の面積が最大となるときの P の座標を (p, q) とする.

- (1) p を求めよ.
- (2) 線分 AB に平行な直線が放物線と 2 点 C, D で交わる時, 線分 CD は直線 $x = p$ によって二等分されることを示せ.
- (3) 放物線と線分 AB によって囲まれる図形は, 直線 $x = p$ によって, 互いに面積の等しい二つの部分に分けられることを示せ.

第 4 問

角 θ の回転を表わす行列を $R(\theta)$ とする. すなわち

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

とする. 2 次正方行列 X で, $X^3 = R(\theta)$ をみたすものはどれだけあるかを考えたい.

- (1) 行列 X が $X^3 = R(\theta)$ をみたせば, X は逆行列をもち, かつ $R(\theta)X = XR(\theta)$ が成立することを示せ.
- (2) 行列 X が, ある角 α の回転を表わす行列 $R(\alpha)$ と, 左上が正, 左下が 0 であるような行列 T との積であるとする. すなわち $X = R(\alpha)T$, ただし

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad a > 0$$

とする. このとき, もし X が $R(\theta)X = XR(\theta)$ をみたし, さらに θ が π の整数倍でなければ, $a = c$, $b = 0$ であることを示せ.

- (3) 一般に, 逆行列をもつ任意の行列 X は, ある角 α の回転を表わす行列 $R(\alpha)$ と, 左上が正, 左下が 0 であるような行列 T との積 $X = R(\alpha)T$ として表わされる. 行列に対応する 1 次変換を考えることによって, このことを示せ.
- (4) $X^3 = R(\theta)$ をみたす行列 X は, θ が π の整数倍でなければ, ちょうど 3 個存在し, θ が π の整数倍ならば, 無限に多く存在することを示せ.

第 5 問

m, n は整数とし, $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 2$ とする.

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ が三つの整数解 (重解があってもよい) をもつような m, n の組をすべて求めよ.
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ が少なくとも一つの整数解をもつために m, n がみたすべき必要十分条件を求めよ.
- (3) $|m| \leq 5, |n| \leq 5$ の範囲で, (ii) の条件をみたす m, n の組はいく通りあるか.

第 6 問

- (1) m, n は自然数とする. 三角関数の加法定理を用いて, 等式

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} \{ \cos(m-n)x - \cos(m+n)x \}$$

が成り立つことを示し, さらに次の積分 $I_{m,n}$ を求めよ.

$$I_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$$

- (2) 整数 k ($0 \leq k \leq 5$), 自然数 m, n および実数 a, b に対して,

$$f(k) = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin kx - a \sin mx - b \sin nx)^2 \, dx,$$

$$p(k) = \frac{5!}{k!(5-k)!} \left(\frac{1}{2} \right)^5, \quad E = \sum_{k=0}^5 p(k) f(k)$$

とおくとき, E を最小にするような m, n, a, b を求めよ.