

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1977年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

2 次方程式 $x^2 + x - 1 = 0$ の 2 つの根 (解) a, b を成分にもつ, 平面上のベクトル $\vec{u} = (a, b)$ を考える. 同じ平面上のベクトル $\vec{v} = (c, d)$ で, $\vec{u}$ と直交し, 長さが 1 であるものの成分 c, d を 2 つの根にもつ 2 次方程式を求めよ.

第 2 問

正の数 a に対し、関数 $f(x) = ax - (1 + a^4)x^3$ を考える．この関数のグラフが x 軸の正の部分と交わる点の x 座標を c とし、積分

$$S_a = \int_0^c f(x) dx$$

を考える． a をいろいろ変えたとき、 S_a の値が最大になるような a の値を求めよ．

第 3 問

関数 $f(x) = \sin x$ に対し、関数 $f^{(n)}(x)$ を、

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{df^{(n)}(x)}{dx}$$

により定める ($n = 0, 1, 2, \dots$). 任意の自然数 n について、2 つの関数 $y = xf^{(n-1)}(x)$ および $y = f^{(n)}(x)$ のグラフを、それぞれ C_1, C_2 とする. P が C_1, C_2 の交点であれば、 P における C_1, C_2 の接線 t_1, t_2 は互いに直交する. これを証明せよ.

第 4 問

- (1) サイコロを 1 回または 2 回ふり、最後に出た目の数を得点とするゲームを考える.
1 回ふって出た目を見た上で、2 回目をふるか否かを決めるのであるが、どのように決めるのが有利であるか.
- (2) 上と同様のゲームで、3 回ふることも許されるとしたら、2 回目、3 回目をふるか否かの決定は、どのようにするのが有利か.

第 5 問

- (1) 底辺の長さ a が一定で、他の 2 辺の和 m も一定 ($m > a$) であるような三角形のうち、面積最大のものは、二等辺三角形であることを示せ.
- (2) 周囲の長さが一定な四辺形のうち、面積最大のものは正方形であることを示せ.

第 6 問

a は正の定数であり, 2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ は次の 4 条件 (1)~(4) をみたしている.

$$\left(\text{ここに } f'(x) = \frac{df(x)}{dx}, g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} \right)$$

- (1) $f'(x) = -g(x)$
- (2) $g'(x) \geq f(x)$ (すべての x の値について)
- (3) $g(0) = 0$
- (4) $0 \leq x \leq a$ ならば $f(x) > 0$

このとき, 次の (i), (ii) を示せ.

- (1) $g(a) > 0$
- (2) $a \leq y \leq a + \frac{f(a)}{g(a)}$, $f(y) = 0$ をみたす実数 y がある.