1977年度入学試験問題

数　学　（理系）

200点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページがある．
3. 問題は全部で6題ある．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，解答用ページに続き方をはっきり示した場合は，見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．なお，他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

（30 点）

2 次方程式 $x^2+x-1=0$ の 2 つの根（解）a，b を成分にもつ，平面上のベクトル $\overrightarrow{u}=(a,\ b)$ を考える．同じ平面上のベクトル $\overrightarrow{v}=(c,\ d)$ で，$\overrightarrow{u}$ と直交し，長さが 1 であるものの成分 c，d を 2 つの根にもつ 2 次方程式を求めよ．

2

（30 点）

正の数 a に対し，関数 $f(x)=ax-(1+a^4)x^3$ を考える．この関数のグラフが x 軸の正の部分と交わる点の x 座標を c とし，積分

$$S_a=\int_0^c f(x)\,dx$$

を考える．a をいろいろ変えたとき，S_a の値が最大になるような a の値を求めよ．

3

（35 点）

関数 $f(x)=\sin x$ に対し，関数 $f^{(n)}(x)$ を，

$$f^{(0)}(x)=f(x),\quad f^{(n+1)}(x)=\frac{df^{(n)}(x)}{dx}$$

により定める（$n=0,1,2,\cdots$）．任意の自然数 n について，2 つの関数 $y=xf^{(n-1)}(x)$ および $y=f^{(n)}(x)$ のグラフを，それぞれ C_1，C_2 とする．P が C_1，C_2 の交点であれば，P における C_1，C_2 の接線 t_1，t_2 は互いに直交する．これを証明せよ．

4

（35 点）

(1) サイコロを 1 回または 2 回ふり，最後に出た目の数を得点とするゲームを考える．1 回ふって出た目を見た上で，2 回目をふるか否かを決めるのであるが，どのように決めるのが有利であるか．

(2) 上と同様のゲームで，3 回ふることも許されるとしたら，2 回目，3 回目をふるか否かの決定は，どのようにするのが有利か．

5

（35 点）

(1) 底辺の長さ a が一定で，他の 2 辺の和 m も一定（$m > a$）であるような三角形のうち，面積最大のものは，二等辺三角形であることを示せ.

(2) 周囲の長さが一定な四辺形のうち, 面積最大のものは正方形であることを示せ.

6

（35 点）

a は正の定数であり，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ は次の 4 条件 (1)〜(4) をみたしている.

$$\left(\text{ここに } f'(x) = \frac{df(x)}{dx},\ g'(x) = \frac{dg(x)}{dx}\right)$$

(1) $f'(x) = -g(x)$

(2) $g'(x) \geqq f(x)$（すべての x の値について）

(3) $g(0) = 0$

(4) $0 \leqq x \leqq a$ ならば $f(x) > 0$

このとき，次の (i)，(ii) を示せ.

(1) $g(a) > 0$

(2) $a \leqq y \leqq a + \dfrac{f(a)}{g(a)}$，$f(y) = 0$ をみたす実数 y がある.

問題は，このページで終わりである。