

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1976年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

- (1) 多項式 $f(x) = x^n$ が、区間 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ において不等式 $|f(x)| < \frac{1}{1000}$ をみたすためには、 n をどのようにとればよいか。
- (2) 最高次の係数が 1 である多項式 $g(x)$ で、区間 $0 \leq x \leq 1$ において不等式 $|g(x)| < \frac{1}{1000}$ をみたし、さらに $10000 < |g(3)| < 100000$ であるようなものの例を 1 つあげよ。

第 2 問

1 つの平面内にある, いくつかの $\vec{0}$ でないベクトルからなる集合 S が条件

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \text{ が } S \text{ のベクトルであれば } \frac{2(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{b}, \vec{b})} \text{ は整数である}$$

をみたしているという. ただし, $(\vec{a}, \vec{b})$ 等はベクトルの内積をあらわす.

- (1) S の 2 つのベクトルの間の角は, $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ およびこれらの補角のうちの 1 つであることを示せ.
- (2) (1) において, 角が $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ の場合には, 2 つのベクトルの長さの比はどうなるか.
- (3) 30° の角をなすベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を含み, 12 個のベクトルからなる集合 S の例を図示し, 各ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ であらわせ.

第 3 問

多項式 $f(x)$ で，等式

$$f(x)f'(x) + \int_1^x f(t) dt = \frac{4}{9}x - \frac{4}{9}$$

をみたしているものをすべて求めよ．ただし， $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数をあらわす．

第 4 問

正の数列 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) が不等式

$$a_n^3 + 3a_n^2 - \left(9 + \frac{1}{n}\right)a_n + 5 < 0$$

をみたしているとき、次の (1), (2) を証明せよ。ただし、(2) を先に証明してもよい。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

(2) $(a_n - 1)^2 < \frac{1}{4n}$

第 5 問

関数 $f(x)$ で 2 つの条件

(イ) $f(x)$ は微分可能

(ロ) $x \leq 0$ のとき $f(x) = 0$, $x \geq 1$ のとき $f(x) = 1$

をみたすものがある.

(1) 微分可能な関数 $g(x)$ と正数 a が与えられたとき, 上の関数 $f(x)$ を用いて, 次の条件 (ハ), (ニ) をみたす微分可能な関数 $h(x)$ を作れ.

(ハ) $h(0) = 0$

(ニ) $|x| > a$ のとき $h(x) = g(x)$

(2) 関数 $f(x)$ の例を 1 つ作り, その関数が (イ) をみたしていることを確かめよ.

ただし, 関数 $f(x)$ が微分可能であるとは, すべての x の値においてその微分係数が存在することである.

第 6 問

外観では区別できない 2 つの袋 U_1, U_2 があり, U_1 には $4n$ 個の赤玉と n 個の白玉, U_2 には $2n$ 個の赤玉と $3n$ 個の白玉がそれぞれ入っている. この袋のどちらかが観測者に手渡され, 袋 U_1 が手渡される確率は $\frac{2}{3}$, 袋 U_2 が手渡される確率は $\frac{1}{3}$ である. 観測者は手渡された袋から 3 個玉をとり出し, 赤玉の数が白玉の数より多いときは手渡された袋は U_1 であると判断し, そうでないときは U_2 であると判断する. 観測者が誤った判断を下す確率を p_n とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ.