

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1975 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：200 点

第 1 問

あるスポーツ大会で，参加した n 個のチームはつぎの方法（リーグ戦形式）で順位を争う．すなわち，どのチームも他の各チームとそれぞれ 1 回ずつ試合を行い，勝ち数の大小によって順位をきめるものとする．今年の大会では，引き分けが 1 回も起こらず，また同順位のチームがなかったという．このとき，どのチームもそれより下位のチームには必ず勝っていることを証明せよ．

第 2 問

- (1) $x \geq 0$ のとき $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(x+1)$ を示せ.
- (2) $\int_0^k \sqrt{x} \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k dx < 1$ を示せ (k は自然数).

第 3 問

α, β, γ がこの順に等差数列であり, $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ がこの順に等比数列であるのはどのようなときか.

第 4 問

平面上で, 3つの定点 A, B, C と定円の周上を動く点 P がある. ベクトル $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ の大きさが最大になるのは点 P がどんな位置にあるときか.

第 5 問

n と $a_1, a_2, \dots, a_n$ は自然数であって, 不等式 $2 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{a_i}\right) - 2 > 0$ をみたすものとする. $S = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{a_i}\right) - 2$ とおく.

- (1) とくに $n = 3$ として, S を最小にする (a_1, a_2, a_3) を求めよ.
- (2) n も自由に動かした可能なすべての組 $(n, a_1, a_2, \dots, a_n)$ のうちで, S を最小にするものを求めよ.

第 6 問

$\triangle ABC$ で $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC = 2$ とする. 頂点 A から斜辺 BC に垂線 AH をひく (H はその交点). 半直線 AH 上に中心 O をもつ半径 1 の円を考える.

- (1) $\triangle ABC$ の 3 つの辺が円 O の周とそれぞれ 2 点で交わるのは, $AO = x$ がどのような範囲にあるときか.
- (2) $\triangle ABC$ と円 O の内部の共通部分の面積を S とする. x が (1) の範囲にあるとき, S をつぎの関数 $F(t)$ を用いて表わせ.

$$F(t) = 2 \int_t^1 \sqrt{1-u^2} du \quad (0 \leq t \leq 1)$$

- (3) x は (1) の範囲にあるとする. $\frac{dS}{dx}$ を求め, S を最大にする x の値を求めよ.