1975年度入学試験問題

数　学　（理系）

200点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページがある．
3. 問題は全部で6題ある．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，解答用ページに続き方をはっきり示した場合は，見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．なお，他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

（30 点）

あるスポーツ大会で，参加した n 個のチームはつぎの方法 (リーグ戦形式) で順位を争う．すなわち，どのチームも他の各チームとそれぞれ 1 回ずつ試合を行い，勝ち数の大小によって順位をきめるものとする．今年の大会では，引き分けが 1 回も起こらず，また同順位のチームがなかったという．このとき，どのチームもそれより下位のチームには必ず勝っていることを証明せよ．

2

（35 点）

(1) $x \geqq 0$ のとき $\sqrt{x} \leqq \dfrac{1}{2}(x+1)$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^k \sqrt{x}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx < 1$ を示せ（k は自然数）．

3

（30 点）

α, β, γ がこの順に等差数列であり，$\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ がこの順に等比数列であるのはどのようなときか．

4

（30 点）

平面上で，3 つの定点 A, B, C と定円の周上を動く点 P がある．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ の大きさが最大になるのは点 P がどんな位置にあるときか．

5

（35 点）

n と $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は自然数であって，不等式 $2 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{a_i}\right)-2>0$ をみたすものとする．$S=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{a_i}\right)-2$ とおく．

(1) とくに $n=3$ として，S を最小にする (a_1, a_2, a_3) を求めよ．

(2) n も自由に動かした可能なすべての組 $(n, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ のうちで，S を最小にするものを求めよ．

6

（40 点）

△ABC で $\angle\mathrm{A}=90^\circ$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=2$ とする．頂点 A から斜辺 BC に垂線 AH をひく（H はその交点）．半直線 AH 上に中心 O をもつ半径 1 の円を考える．

(1) △ABC の 3 つの辺が円 O の周とそれぞれ 2 点で交わるのは，$\mathrm{AO}=x$ がどのような範囲にあるときか．

(2) △ABC と円 O の内部の共通部分の面積を S とする．x が (1) の範囲にあるとき，S をつぎの関数 $F(t)$ を用いて表わせ．

$$F(t)=2\int_t^1 \sqrt{1-u^2}\,du \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

(3) x は (1) の範囲にあるとする．$\dfrac{dS}{dx}$ を求め，S を最大にする x の値を求めよ．

問題は，このページで終わりである。