

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1974年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

$0 \leq \alpha < \beta < \gamma < 2\pi$ であつて $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$, $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$ であるという. $\beta - \alpha$ と $\gamma - \beta$ の値を求めよ.

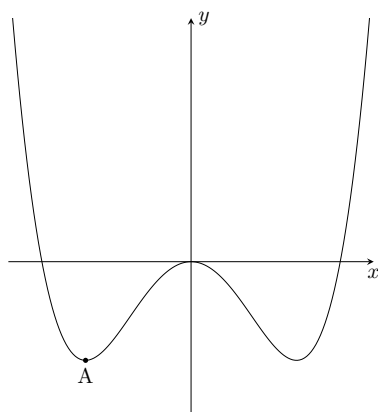
第 2 問

内部の形が半径 10cm の半球形の容器（へりの大円が上部，水平におかれている）に水がいっぱいはいっている．ここから水をくみ出すのに，水面の下がる速さを v cm/秒（一定）にしたい（もちろん，からになる時点までの範囲に限定する）．

- (1) t 秒間にくみ出す水の量はどれだけか．ただし $0 \leq t \leq \frac{10}{v}$ ．
- (2) t 秒後において水をくみ出す速さはどれだけか，単位は $\text{cm}^3/\text{秒}$ で求めよ．ただし $0 < t < \frac{10}{v}$ ．

第 3 問

底の断面の形が曲線 $y = x^4 - 6p^2x^2 - 8q^3x$ ($p > 0, q \geq 0$) の形の容器がある. (y 軸は鉛直, 正の方向を上方にとり, x 軸は水平にとる.) 最初 $q = 0$ のときは, 大体下図の形になっているので, 図の点 A の位置に小球をおく. ここで, p は固定したまま, q の値をだんだん大きくしていったら, ある値を越えたら, この小球は右側のくぼみに転落した. この値を p を用いて表わせ.



第 4 問

$F(x)$, $g(x)$ が x の多項式で, 次の三条件をみたすものとする. $F(x)$ および $g(x)$ を求めよ.

(1) $\frac{dF(x)}{dx} = g(x)$.

(2) $F(x)$ は $g(x)$ で割りきれ.

(3) $g(x)$ は n 次式で, x^n の係数は 1, x^{n-1} の係数は 0 である.

第 5 問

正の定数 a, b に対し, 不等式 $4m < n^2 < 4m + \frac{a}{\sqrt{m}} + \frac{b}{m}$ を考え, 次の問いに答えよ.

- (1) $m > 0$, かつ m, n ともに整数であって, この不等式をみたすような m, n の組は有限個しか存在しないことを証明せよ.
- (2) $a = 8, b = 9, m \geq 9$ であるときは, 上の不等式をみたす整数 m, n の組は $n^2 = 4m + 1$ をみたすことを証明せよ.
- (3) (2) の場合の m, n の組のうち, n が最も大きいものを求めよ.

第 6 問

- (1) $\triangle OP_0P_1$ が与えられている. 辺 P_0O 上に点 $P_2, P_4, \dots, P_{2n}, \dots$ を, また辺 P_1O 上に点 $P_3, P_5, \dots, P_{2n+1}, \dots$ を適当にとつて, 次の三条件 (i)~(iii) がみたされるようにしうための, $\triangle OP_0P_1$ についての条件を求めよ.
- (i) $P_0, P_2, P_4, \dots, P_{2n}, \dots$ はこの順に線分 P_0O 上にならび, しかも n が大きくなるに従つて, O に近づく.
 - (ii) $P_1, P_3, P_5, \dots, P_{2n+1}, \dots$ はこの順に線分 P_1O にならんでいる.
 - (iii) $\triangle P_{n-1}P_nP_{n+1} \sim \triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ が, n のどの自然数値に対しても成立する.
(ここでいう相似は, 左辺の三角形の P_{n-1}, P_n, P_{n+1} が右辺の三角形の P_n, P_{n+1}, P_{n+2} に順次対応した相似を意味する.)
- (2) 上のように点がとれたとき, $\triangle P_{n-1}P_nP_{n+1}$ の面積を第 n 項 ($n = 1, 2, \dots$) とする数列は
- (i) いつでも等比数列である
 - (ii) 等比数列になる場合もあり, 等比数列にならない場合もある
 - (iii) けっして等比数列にはならない
- のどれが正しいか, 理由を付して答えよ.