

1974年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

$0 \leq \alpha < \beta < \gamma < 2\pi$ であって $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$, $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$ であるという. $\beta - \alpha$ と $\gamma - \beta$ の値を求めよ.

2

(30 点)

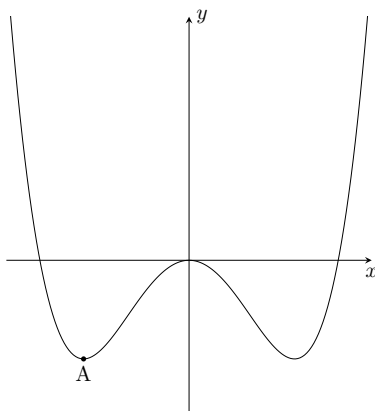
内部の形が半径 10cm の半球形の容器（へりの大円が上部，水平におかれている）に水がいっぱいはいっている．ここから水をくみ出すのに，水面の下がる速さを v cm/秒（一定）にしたい（もちろん，からになる時点までの範囲に限定する）.

- (1) t 秒間にくみ出す水の量はどれだけか．ただし $0 \leq t \leq \frac{10}{v}$.
- (2) t 秒後において水をくみ出す速さはどれだけか，単位は $\text{cm}^3/\text{秒}$ で求めよ．ただし $0 < t < \frac{10}{v}$.

3

(35 点)

底の断面の形が曲線 $y = x^4 - 6p^2x^2 - 8q^3x$ ($p > 0, q \geq 0$) の形の容器がある．（ y 軸は鉛直，正の方向を上方にとり， x 軸は水平にとる．）最初 $q = 0$ のときは，大体下図の形になっているので，図の点 A の位置に小球をおく．ここで， p は固定したまま， q の値をだんだん大きくしていったら，ある値を越えたら，この小球は右側のくぼみに転落した．この値を p を用いて表わせ．



4

(35 点)

$F(x)$, $g(x)$ が x の多項式で, 次の三条件をみたすものとする. $F(x)$ および $g(x)$ を求めよ.

(1) $\frac{dF(x)}{dx} = g(x)$.

(2) $F(x)$ は $g(x)$ で割りきれれる.

(3) $g(x)$ は n 次式で, x^n の係数は 1, x^{n-1} の係数は 0 である.

5

(35 点)

正の定数 a , b に対し, 不等式 $4m < n^2 < 4m + \frac{a}{\sqrt{m}} + \frac{b}{m}$ を考え, 次の問いに答えよ.

(1) $m > 0$, かつ m , n ともに整数であって, この不等式をみたすような m , n の組は有限個しか存在しないことを証明せよ.

(2) $a = 8$, $b = 9$, $m \geq 9$ であるときは, 上の不等式をみたす整数 m , n の組は $n^2 = 4m + 1$ をみたすことを証明せよ.

(3) (2) の場合の m , n の組のうち, n が最も大きいものを求めよ.

- (1) $\triangle OP_0P_1$ が与えられている. 辺 P_0O 上に点 $P_2, P_4, \dots, P_{2n}, \dots$ を, また辺 P_1O 上に点 $P_3, P_5, \dots, P_{2n+1}, \dots$ を適当にとって, 次の三条件 (i)~(iii) がみたされるようにしうるための, $\triangle OP_0P_1$ についての条件を求めよ.
- (i) $P_0, P_2, P_4, \dots, P_{2n}, \dots$ はこの順に線分 P_0O 上にならび, しかも n が大きくなるに従って, O に近づく.
- (ii) $P_1, P_3, P_5, \dots, P_{2n+1}, \dots$ はこの順に線分 P_1O にならんでいる.
- (iii) $\triangle P_{n-1}P_nP_{n+1} \sim \triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ が, n のどの自然数値に対しても成立する. (ここでいう相似は, 左辺の三角形の P_{n-1}, P_n, P_{n+1} が右辺の三角形の P_n, P_{n+1}, P_{n+2} に順次対応した相似を意味する.)
- (2) 上のように点がとれたとき, $\triangle P_{n-1}P_nP_{n+1}$ の面積を第 n 項 ($n = 1, 2, \dots$) とする数列は
- (i) いつでも等比数列である
- (ii) 等比数列になる場合もあり, 等比数列にならない場合もある
- (iii) けっして等比数列にはならない
- のどれが正しいか, 理由を付して答えよ.

問題は, このページで終わりである。

