

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1973年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

10 進法で 3 けたの整数 α (≥ 0) をとり, α の一位の数と百位の数を入れかえてできる数を α' とする. ただし, 1 けたの数, 2 けたの数もそれぞれその前に 00 および 0 をつけて 3 けたの数とみなす.

α が 0 から 999 までのすべての整数をとるとき, 整数 $\alpha - \alpha'$ 全体の集合を A とし, A に含まれる正の整数全体の集合を B とする. このとき

- (1) A, B に属する整数の個数を求めよ.
- (2) B に属する整数の総和を求めよ.

第 2 問

p, q, r は実数とする. 三次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ において, 一根が 1 で他の二根はその絶対値がいずれも 1 であるための必要十分条件を求めよ.

第 3 問

正三角形 $\triangle ABC$ がある．点 O を直線 AB に関して C と反対側にとって $\angle AOB = 60^\circ$ となるようにし，ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表わす．このとき

$$\vec{c} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}$$

であることを証明せよ．ただし $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ はそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ の大きさを示す．

第 4 問

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{\left(\sqrt{n(n+1)} - n \right)^3}{n} - \frac{\left(\sqrt{n(n+1)} - (n+1) \right)^3}{n+1} \right] \text{を求めよ.}$$

第 5 問

n は自然数とし,

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

とする. このとき, $-1 \leq x \leq 1$ において $1 \leq f(x) < 2$ であることを証明せよ.

第 6 問

当り“くじ”が確率 p ($0 < p < 1$) で現われる“くじ”があり、たかだか 2 回引くことができる。各自、最初に得点 1 をもってこの“くじ”を引き、当り“くじ”ならば得点 1 を加え、そうでなければ 1 だけ減ずる。“くじ”を引き終えたときの合計得点が負または 0 ならば受け取る報酬は 0、正ならばその得点そのまま報酬になるものとする。このとき、

A 君は一度も“くじ”を引かないことに決め、

B 君は一度“くじ”を引き、当ればそこで止め、当らなければもう一度引くことに決め、

C 君は当る当らないにかかわらず 2 回引くことに決めた。

A, B, C 3 君の報酬の期待値を比較し、誰が一番有利であるかを判定せよ。