

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1972年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

2 つまたは 3 つのベクトルの加法について、次の法則が成立する.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}, \quad (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

いま, n 個のベクトルを $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$ とし, その順序を任意にかえたものを, $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_n$ とする. 上の 2 つの法則だけをつかって,

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \dots + \vec{A}_n = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n$$

がなりたつことを数学的帰納法を用いて示せ. なお, たとえば 4 つのベクトル $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ について, その和 $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ は $\{(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}\} + \vec{D}$ を意味するものとし, 一般の場合も同様とする.

第 2 問

次の式で定められる関数 $F(x)$ に対して, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x) - \log x]$ を求めよ.

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{(t+1)(t+3)} dt \quad (x > 0)$$

第 3 問

実数または複素数の x, y, z, a について, $x + y + z = a, x^3 + y^3 + z^3 = a^3$ の 2 式が成立するとき, x, y, z のうち少なくとも 1 つは a に等しいことを示せ.

第 4 問

三角形 ABC の内部の 1 点 P を頂点とする 1 つの平行四辺形を $PQRS$ とする. P から Q へ向かう半直線が三角形 ABC の周と交わる点を Q' とし, R', S' も同様の点とする. $\overrightarrow{PQ} = a\overrightarrow{PQ'}, \overrightarrow{PR} = b\overrightarrow{PR'}, \overrightarrow{PS} = c\overrightarrow{PS'}$ とおくと, $a + c \geq b$ が成立することを示せ. ($\overrightarrow{PQ}$ などはベクトルを表わす)

第 5 問

だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) の上の点 $P(x, y)$ を媒介変数 u をつかって,

$$x = a \cos u, \quad y = b \sin u, \quad (0 \leq u < 2\pi)$$

で表わす. 時間を t とし, P は t の変化につれて次のように移動する. 時刻 $t = 0$ のとき点 P は $(a, 0)$ にあり, その後このだ円上を時計の針の進行方向と逆の方向に動く. 時刻 $t (> 0)$ までに線分 OP の通過した部分の面積を S とする. つねに $\frac{dS}{dt} = 1$ であるとき, u を t の関数として表わせ. (O は原点である.)

第 6 問

n 枚のカードがあり、それぞれのカードには $a_1, a_2, \dots, a_n$ という数字が記入されている．これをよく混ぜて無作為（任意）に 1 枚のカードをとり出すとき、それに記入された数の期待値（平均値）を E とする．また、同時に 2 枚のカードをとり出すとき、記入された 2 数の和の期待値（平均値）を F とすれば、 $F = 2E$ となることを示せ．($n \geq 2$)