

1972年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(35 点)

2つまたは3つのベクトルの加法について、次の法則が成立する.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}, \quad (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

いま, n 個のベクトルを $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$ とし, その順序を任意にかえたものを, $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_n$ とする. 上の2つの法則だけをつかって,

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \dots + \vec{A}_n = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n$$

がなりたつことを数学的帰納法を用いて示せ. なお, たとえば4つのベクトル $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ について, その和 $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ は $\{(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}\} + \vec{D}$ を意味するものとし, 一般の場合も同様とする.

2

(35 点)

次の式で定められる関数 $F(x)$ に対して, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x) - \log x]$ を求めよ.

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{(t+1)(t+3)} dt \quad (x > 0)$$

3

(35 点)

実数または複素数の x, y, z, a について, $x + y + z = a, x^3 + y^3 + z^3 = a^3$ の2式が成立するとき, x, y, z のうち少なくとも1つは a に等しいことを示せ.

4

(35 点)

三角形 ABC の内部の 1 点 P を頂点とする 1 つの平行四辺形を PQRS とする．P から Q へ向かう半直線が三角形 ABC の周と交わる点を Q' とし，R', S' も同様の点とする． $\overrightarrow{PQ} = a\overrightarrow{PQ'}$, $\overrightarrow{PR} = b\overrightarrow{PR'}$, $\overrightarrow{PS} = c\overrightarrow{PS'}$ とおくとき， $a + c \geq b$ が成立することを示せ．($\overrightarrow{PQ}$ などはベクトルを表わす)

5

(30 点)

だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) の上の点 P (x, y) を媒介変数 u をつかって，

$$x = a \cos u, \quad y = b \sin u, \quad (0 \leq u < 2\pi)$$

で表わす．時間を t とし，P は t の変化につれて次のように移動する．時刻 $t = 0$ のとき点 P は $(a, 0)$ にあり，その後このだ円上を時計の針の進行方向と逆の方向に動く．時刻 t (> 0) までに線分 OP の通過した部分の面積を S とする．つねに $\frac{dS}{dt} = 1$ であるとき， u を t の関数として表わせ．(O は原点である.)

6

(30 点)

n 枚のカードがあり，それぞれのカードには $a_1, a_2, \dots, a_n$ という数字が記入されている．これをよく混ぜて無作為（任意）に 1 枚のカードをとり出すとき，それに記入された数の期待値（平均値）を E とする．また，同時に 2 枚のカードをとり出すとき，記入された 2 数の和の期待値（平均値）を F とすれば， $F = 2E$ となることを示せ．($n \geq 2$)

問題は，このページで終わりである。

