

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1971 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：200 点

第 1 問

座標平面において、 x, y がともに整数であるような点 (x, y) を格子点とよぶことにする。
この平面上で、

- (1) 辺の長さが 1 で、辺が座標軸に平行な正方形（周をこめる）は少なくとも一つの格子点を含むことを証明せよ。
- (2) 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形（周をこめる）は、どんな位置にあっても、少なくとも一つの格子点を含むことを証明せよ。

第 2 問

α, β は複素数で, α の絶対値は 1 とする. このとき $z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$ を満足する複素数 z があるための必要十分条件は $\alpha\bar{\beta} = \beta$ であることを示せ. ここに $\bar{z}, \bar{\beta}$ はそれぞれ z, β の共役複素数を表わす.

第 3 問

関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b は実数) の $0 \leq x \leq 1$ における最小値を m とする. 不等式 $a + 2b \leq 2$ を満足する a, b で, m を最大にするものを求めよ.

第 4 問

xy 平面上の曲線 $y = \sqrt{|x^2 - 1|}$ と直線 $y = 2$ とが囲む図形を x 軸のまわりに回転してえられる回転体の体積を求めよ.

第 5 問

半径 r の円に内接する正 n 角形の頂点を順次 $A_1, A_2, \dots, A_n$ とする. まず頂点 A_2 を中心とする半径 A_2A_1 の円と辺 A_3A_2 の延長 ($\overrightarrow{A_3A_2}$ の方向) との交点を B_1 として扇形 $A_2A_1B_1$ をつくる. 次に頂点 A_3 を中心とする半径 A_3B_1 の円と辺 A_4A_3 の延長 ($\overrightarrow{A_4A_3}$ の方向) との交点を B_2 として扇形 $A_3B_1B_2$ をつくる. 順次このようにして n 個の扇形をつくる. さて, 正 n 角形 $A_1A_2 \dots A_n$ の面積とこれら n 個の扇形の面積の総和を S_n で表わすとき,

(1) S_n を n, r を用いて表わせ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

第 6 問

xy 平面上に二つの動点 P, Q がある. P は点 $(1, 0)$ から出発し, 原点 O を中心とする半径 1 の円周上を正の向きに一定の速さ π (円周率) で回転する. Q は点 $(a, 0)$ から P と同時に出発し, y 軸に平行な直線上を y の増加方向に一定の速さ v で進む. ただし $0 < v < a\pi$ とする.

- (1) 出発時から測って, 時刻 n と $n+1$ との間で 3 点 O, P, Q が一直線上にならぶ時刻 t_n がただ 1 回あることを示せ. ただし $n = 0, 1, 2, \dots$ とする.
- (2) n が増してゆくと, $t_n - n$ は一定値に近づくことを示せ.