1971年度入学試験問題

数　学　（理系）

200点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページがある．
3. 問題は全部で6題ある．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，解答用ページに続き方をはっきり示した場合は，見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．なお，他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

（35 点）

座標平面において，x，y がともに整数であるような点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶことにする．この平面上で，

(1) 辺の長さが 1 で，辺が座標軸に平行な正方形（周をこめる）は少なくとも一つの格子点を含むことを証明せよ．

(2) 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形（周をこめる）は，どんな位置にあっても，少なくとも一つの格子点を含むことを証明せよ．

2

（35 点）

α，β は複素数で，α の絶対値は 1 とする．このとき $z+\alpha\bar{z}+\beta=0$ を満足する複素数 z があるための必要十分条件は $\alpha\bar{\beta}=\beta$ であることを示せ．ここに $\bar{z}$，$\bar{\beta}$ はそれぞれ z，β の共役複素数を表わす．

3

（35 点）

関数 $f(x)=x^2+ax+b$（a，b は実数）の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を m とする．不等式 $a+2b \leqq 2$ を満足する a，b で，m を最大にするものを求めよ．

4

（35 点）

xy 平面上の曲線 $y=\sqrt{|x^2-1|}$ と直線 $y=2$ とが囲む図形を x 軸のまわりに回転してえられる回転体の体積を求めよ．

5

（35 点）

半径 r の円に内接する正 n 角形の頂点を順次 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots\cdots, \mathrm{A}_n$ とする．まず頂点 A_2 を中心とする半径 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1$ の円と辺 $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2$ の延長（$\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2}$ の方向）との交点を B_1 として扇形 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ をつくる．次に頂点 A_3 を中心とする半径 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1$ の円と辺 $\mathrm{A}_4\mathrm{A}_3$ の延長（$\overrightarrow{\mathrm{A}_4\mathrm{A}_3}$ の方向）との交点を B_2 として扇形 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$ をつくる．順次このようにして n 個の扇形をつくる．さて，正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\cdots\mathrm{A}_n$ の面積とこれら n 個の扇形の面積の総和を S_n で表わすとき，

(1) S_n を n，r を用いて表わせ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

6

（35 点）

xy 平面上に二つの動点 P，Q がある．P は点 $(1,\ 0)$ から出発し，原点 O を中心とする半径 1 の円周上を正の向きに一定の速さ π（円周率）で回転する．Q は点 $(a,\ 0)$ から P と同時に出発し，y 軸に平行な直線上を y の増加方向に一定の速さ v で進む．ただし $0<v<a\pi$ とする．

(1) 出発時から測って，時刻 n と $n+1$ との間で 3 点 O，P，Q が一直線上にならぶ時刻 t_n がただ 1 回あることを示せ．ただし $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ とする．

(2) n が増してゆくと，t_n-n は一定値に近づくことを示せ．

問題は，このページで終わりである。