入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

京都大学（文系）

対象年度： 2025 年

試験時間： 120 分

問題数： 5 問

配点： 150 点

第　1　問

次の各問に答えよ．

問 1　x，y，z は実数で

$$2025^x = 3^y = 5^z$$

を満たすとする．このとき $2xy + 4xz - yz = 0$ であることを示せ．

問 2　$n^4 + 6n^2 + 23$ が $n^2 + n + 3$ で割り切れるような正の整数 n をすべて求めよ．

第　2　問

実数 a, b についての次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$　ある実数係数の 2 次式 $f(x)$ と，ある実数 c に対して，x についての恒等式

$$\frac{1}{8}x^4 + ax^3 + bx^2 = f(f(x)) + c$$

が成り立つ．

この条件 $(*)$ を満たす点 $(a,\ b)$ 全体の集合を座標平面上に図示せよ．

第　3　問

n は正の整数とする．1 枚の硬貨を投げ，表が出たら 1，裏が出たら 2 と記録する．この試行を n 回繰り返し，記録された順に数字を左から並べて n 桁の数 X を作る．ただし，数の表し方は十進法とする．このとき，X が 6 で割り切れる確率を求めよ．

第 4 問

座標平面において，曲線 C_1 : $y = x^2 - 2|x|$，曲線 C_2 : $y = x^2 - 5x + \dfrac{7}{4}$，直線 l_1 : $x = \dfrac{3}{2}$ を考える．

(1) 点 (0, 0) と異なる点で C_1 と接し，さらに C_2 とも接するような直線 l_2 がただ一つ存在することを示せ．

(2) C_1 と l_2 の共有点を P とし，その x 座標を α とする．また，l_1 と l_2 の共有点を Q とし，C_1 と l_1 の共有点を R とする．曲線 C_1 の $\alpha \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ の部分，線分 PQ, および線分 QR で囲まれる図形の面積を求めよ．

第　5　問

座標空間の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．s，t，u は 0 でない実数とする．直線 OA 上の点 L，直線 OB 上の点 M，直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つようにとる．s，t，u が $\dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{t} + \dfrac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき，3 点 L，M，N の定める平面 LMN は，s，t，u の値に無関係な一定の点を通ることを示せ.