

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：2018年

試験時間：120分

問題数：5問

配点：150点

第 1 問

a は正の実数とし、座標平面内の点 (x_0, y_0) は 2 つの曲線

$$C_1: y = |x^2 - 1|, \quad C_2: y = x^2 - 2ax + 2$$

の共有点であり、 $|x_0| \neq 1$ を満たすとする． C_1 と C_2 が (x_0, y_0) で共通の接線をもつとき、 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

第 2 問

1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において、辺 BC 上に B とは異なる点 P を取り、線分 AP の垂直 2 等分線が辺 AB、辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q、R とする。

- (1) 線分 QR の長さを $\sin \angle BAP$ を用いて表せ。
- (2) 点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ。

第 3 問

$n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ.

第 4 問

四面体 $ABCD$ は $AC = BD$, $AD = BC$ を満たすとし, 辺 AB の中点を P , 辺 CD の中点を Q とする.

- (1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ.
- (2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 $ABCD$ を切って 2 つの部分に分ける. このとき, 2 つの部分の体積は等しいことを示せ.

第 5 問

整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して、次の一連の操作を考える。ただし各球に書かれている整数は 1 つのみとする。

- (i) 袋から無作為に球を 1 個取り出し、その球に書かれている整数を k とする。
- (ii) $k \neq 0$ の場合、整数 k が書かれた球を 1 個新たに用意し、取り出した球とともに袋に戻す。
- (iii) $k = 0$ の場合、袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より 1 大きい整数が書かれた球を 1 個新たに用意し、取り出した球とともに袋に戻す。

整数 0 が書かれている球が 1 個入っており他の球が入っていない袋を用意する。この袋に上の一連の操作を繰り返し n 回行った後に、袋の中にある球に書かれている $n+1$ 個の数の合計を X_n とする。例えば X_1 は常に 1 である。以下 $n \geq 2$ として次の問に答えよ。

- (1) $X_n \geq \frac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率を求めよ。
- (2) $X_n \leq n+1$ である確率を求めよ。