

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：2014年

試験時間：120分

問題数：5問

配点：150点

第 1 問

$0 \leq \theta < 90^\circ$ とする. x についての 4 次方程式

$$\{x^2 - 2(\cos \theta)x - \cos \theta + 1\}\{x^2 + 2(\tan \theta)x + 3\} = 0$$

は虚数解を少なくとも 1 つ持つことを示せ.

第 2 問

t を実数とする. $y = x^3 - x$ のグラフ C へ点 $P(1, t)$ から接線を引く.

- (1) 接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ.
- (2) t が (1) で求めた範囲を動くとき, $P(1, t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする. $S(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ.

第 3 問

座標空間における次の 3 つの直線 l, m, n を考える：

l は点 $A(1, 0, -2)$ を通り、ベクトル $\vec{u} = (2, 1, -1)$ に平行な直線である．

m は点 $B(1, 2, -3)$ を通り、ベクトル $\vec{v} = (1, -1, 1)$ に平行な直線である．

n は点 $C(1, -1, 0)$ を通り、ベクトル $\vec{w} = (1, 2, 1)$ に平行な直線である．

P を l 上の点として、 P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする．このとき、 $PQ^2 + PR^2$ を最小にするような P と、そのときの $PQ^2 + PR^2$ を求めよ．

第 4 問

次の式

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える.

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 次の不等式

$$a_n^2 - 2a_n > 10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ. ただし, $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい.

第 5 問

1 から 20 までの目がふられた正 20 面体のサイコロがあり、それぞれの目が出る確率は等しいものとする。A, B の 2 人がこのサイコロをそれぞれ一回ずつ投げ、大きな目を出した方はその目を得点とし、小さな目を出した方は得点を 0 とする。また同じ目が出た場合は、A, B ともに得点を 0 とする。このとき、A の得点の期待値を求めよ。