

2014年度入学試験問題

数 学 (文系)

150 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で5題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

$0 \leq \theta < 90^\circ$ とする. x についての 4 次方程式

$$\{x^2 - 2(\cos \theta)x - \cos \theta + 1\}\{x^2 + 2(\tan \theta)x + 3\} = 0$$

は虚数解を少なくとも 1 つ持つことを示せ.

2

(30 点)

t を実数とする. $y = x^3 - x$ のグラフ C へ点 $P(1, t)$ から接線を引く.

- (1) 接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ.
- (2) t が (1) で求めた範囲を動くとき, $P(1, t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする. $S(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ.

3

(30 点)

座標空間における次の 3 つの直線 l, m, n を考える:

l は点 $A(1, 0, -2)$ を通り, ベクトル $\vec{u} = (2, 1, -1)$ に平行な直線である.

m は点 $B(1, 2, -3)$ を通り, ベクトル $\vec{v} = (1, -1, 1)$ に平行な直線である.

n は点 $C(1, -1, 0)$ を通り, ベクトル $\vec{w} = (1, 2, 1)$ に平行な直線である.

P を l 上の点として, P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする. このとき, $PQ^2 + PR^2$ を最小にするような P と, そのときの $PQ^2 + PR^2$ を求めよ.

4

(30 点)

次の式

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える.

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 次の不等式

$$a_n^2 - 2a_n > 10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ. ただし, $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい.

5

(30 点)

1 から 20 までの目がふられた正 20 面体のサイコロがあり, それぞれの目が出る確率は等しいものとする. A, B の 2 人がこのサイコロをそれぞれ一回ずつ投げ, 大きな目を出した方はその目を得点とし, 小さな目を出した方は得点を 0 とする. また同じ目が出た場合は, A, B とともに得点を 0 とする. このとき, A の得点の期待値を求めよ.

問題は, このページで終わりである。

