

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：2004年

試験時間：120分

問題数：5問

配点：150点

第 1 問

$$f(\theta) = \cos 4\theta - 4 \sin^2 \theta$$

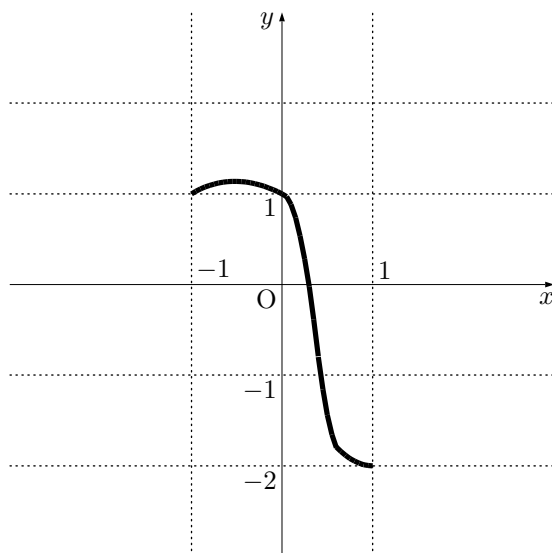
とする. $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ.

第 2 問

区間 $-1 \leq x \leq 1$ で定義された関数 $f(x)$ が,

$$f(-1) = f(0) = 1, \quad f(1) = -2$$

を満たし, またそのグラフが下図のようになっているという.



このとき,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \geq -1$$

を示せ.

第 3 問

$\triangle OAB$ において, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とする.

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 5, \quad \cos(\angle AOB) = \frac{3}{5}$$

とする. このとき, $\angle AOB$ の 2 等分線と, B を中心とする半径 $\sqrt{10}$ の円との交点の, O を原点とする位置ベクトルを, $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いてあらわせ.

第 4 問

c を実数とする. x についての 2 次方程式

$$x^2 + (3 - 2c)x + c^2 + 5 = 0$$

が 2 つの解 α, β を持つとする. 複素平面上の 3 点 α, β, c^2 が 3 角形の 3 頂点になり, その 3 角形の重心は 0 であるという. c を求めよ.

第 5 問

n, a, b を 0 以上の整数とする. a, b を未知数とする方程式

$$(*) \quad a^2 + b^2 = 2^n$$

を考える.

- (1) $n \geq 2$ とする. a, b が方程式 $(*)$ を満たすならば, a, b はともに偶数であることを証明せよ. (ただし, 0 は偶数に含める.)
- (2) 0 以上の整数 n に対して, 方程式 $(*)$ を満たす 0 以上の整数の組 (a, b) をすべて求めよ.