

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：2003年

試験時間：120分

問題数：5問

配点：150点

第 1 問

$\frac{23}{111}$ を $0.a_1a_2a_3a_4\cdots$ のように小数で表す. すなわち小数第 k 位の数を a_k とする.

このとき $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k}$ を求めよ.

第 2 問

xy 平面上で、放物線 $C: y = x^2 + x$ と、直線 $l: y = kx + k - 1$ を考える。このとき次の問に答えよ。

- (1) 放物線 C と直線 l が相異なる 2 点で交わるような k の範囲を求めよ。
- (2) 放物線 C と直線 l の 2 つの交点を P, Q とし、線分 PQ の長さを L 、線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積を S とする。 k が (1) で定まる範囲を動くとき、 $\frac{S}{L^3}$ の値のとりうる範囲を求めよ。

第 3 問

四面体 $OABC$ は次の 2 つの条件

(i) $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$

(ii) 4 つの面の面積がすべて等しい.

をみたしている. このとき, この四面体は正四面体であることを示せ.

第 4 問

p は 3 以上の素数であり, x, y は $0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq p$ をみたす整数であるとする.
このとき x^2 を $2p$ で割った余りと, y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ, $x = y$ であることを示せ.

第 5 問

4 チームがリーグ戦を行う．すなわち，各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する．引き分けはないものとし，勝つ確率はすべて $\frac{1}{2}$ で，各回の勝敗は独立に決まるものとする．勝ち数の多い順に順位をつけ，勝ち数が同じであればそれらは同順位とする．1 位のチーム数の期待値を求めよ．