

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1999 年

試験時間：120 分

問題数：5 問

配点：150 点

第 1 問

鋭角三角形 $\triangle ABC$ において、辺 BC の中点を M 、 A から辺 BC にひいた垂線を AH とする。点 P を線分 MH 上にとるとき、

$$AB^2 + AC^2 \geq 2AP^2 + BP^2 + CP^2$$

となることを示せ。

第 2 問

放物線 $y = x^2$ の上を動く 2 点 P, Q があって, この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき, PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ.

第 3 問

0 以上の整数 x に対して, $C(x)$ で x の下 2 桁を表すことにする. たとえば, $C(12578) = 78$, $C(6) = 6$ である. n を 2 でも 5 でも割り切れない正の整数とする.

- (1) x, y が 0 以上の整数のとき, $C(nx) = C(ny)$ ならば, $C(x) = C(y)$ であることを示せ.
- (2) $C(nx) = 1$ となる 0 以上の整数 x が存在することを示せ.

第 4 問

相異なる 4 つの複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 に対して

$$w = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

と置く. このとき, 以下を証明せよ.

- (1) 複素数 z が単位円上にあるための必要十分条件は $\bar{z} = \frac{1}{z}$ である.
- (2) z_1, z_2, z_3, z_4 が単位円上にあるとき, w は実数である.
- (3) z_1, z_2, z_3 が単位円上にあり, w が実数であれば, z_4 は単位円上にある.

第 5 問

n, k は自然数で, $n \geq 3, k \geq 2$ を満たすものとする. いま, n 角柱の $n+2$ 個の面に 1 から $n+2$ までの番号が書いてあるものとする. この $n+2$ 個の面に 1 面ずつ, 異なる k 色の中から 1 色ずつ選んでは塗っていく. このとき, どの隣り合う面の組も同一色では塗られない塗り方の数を P_k で表す.

- (1) P_2 と P_3 を求めよ.
- (2) $n = 7$ のとき, P_4 を求めよ.