

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1997年

試験時間：120分

問題数：5問

配点：150点

第 1 問

単位円 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上の点 P をとり、定点 $A(-2, 0)$ から P へ線分を引き、その線分の P の側の延長線上に点 Q を $AP \cdot PQ = 3$ となるようにとる。ただし、 AP は線分 AP の長さを表す。

(1) $s = AP$, $t = OQ$ において、 t を s で表せ。ただし、 $O(0, 0)$ は原点である。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき、点 Q の描く軌跡を求めよ。

第 2 問

自然数 n の約数の個数を d とする. n の約数すべてを小さい順に並べて得られる数列を a_k ($1 \leq k \leq d$) とする. したがって, $a_1 = 1$, $a_d = n$, $a_k < a_{k+1}$ ($1 \leq k < d$) である. このとき, n に対する次の 2 つの条件 (イ), (ロ) は互いに同値 ((イ) $\Longleftrightarrow$ (ロ)) であることを示せ.

(イ) n は 60 の倍数である.

(ロ) n は 6 個以上の約数を持ち, $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_6} = \frac{1}{a_2}$ となる.

第 3 問

面積 1 の 3 角形 $\triangle ABC$ において、辺 AB 上に 1 点 P をとり、 P を通り辺 BC に平行な直線と辺 AC の交点を Q とする。さらに線分 PQ の中点に関して A と対称な点を R とする。点 P が辺 AB 上を動くとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ の共通部分の面積 S の最大値を求めよ。

第 4 問

2 次関数 $y = (ax + b)^2$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値を $M(a, b)$ とする. このとき, 次の不等式 (*) が任意の実数 a, b に対して成り立つような実数 m の中で最小のものを求めよ.

$$(*) \quad M(a, b) \leq m \int_0^1 (ax + b)^2 dx$$

第 5 問

箱の中に 1 と書かれたカードと 3 と書かれたカードが合計 N 枚入れている。1 回の試行で、箱の中からでたらめに 1 枚のカードを取り出し、その数字を見た上で、箱の中に戻す。

A, B の 2 人がそれぞれ試行を 2 回または 3 回行って、その間に取り出したカードに書かれている数の合計が大きい方を勝ちとするゲームを行う。ただし、1 人が 3 回の試行を行って、取り出した数の合計が 7 または 9 の場合には、その人の得点は 0 とする規則である。

そこで A, B はそれぞれ次の作戦でゲームを行うことにした。

A: 2 回目までの合計が 2 のときは 3 回目を行い、4 または 6 のときは 3 回目を行わない。

B: 2 回目までの合計が 2 または 4 のときは 3 回目を行い、6 のときは 3 回目を行わない。

1 と書かれたカードの枚数を n ($0 < n < N$) とし、 $p = \frac{n}{N}$ とする。

- (1) A の得点の期待値 E_A , B の得点の期待値 E_B をそれぞれ p で表せ。また、 $E_A > E_B$ となるための p の条件を求めよ。
- (2) A の勝つ確率を P_A , B の勝つ確率を P_B とするとき、「 $E_A > E_B$ ならば $P_A > P_B$ 」といえるか。