

1997年度入学試験問題

数 学 (文系)

150 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で5題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

単位円 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上の点 P をとり, 定点 $A(-2, 0)$ から P へ線分を引き, その線分の P の側の延長線上に点 Q を $AP \cdot PQ = 3$ となるようにとる. ただし, AP は線分 AP の長さを表す.

(1) $s = AP$, $t = OQ$ において, t を s で表せ. ただし, $O(0, 0)$ は原点である.

(2) 点 P が円 C 上を動くとき, 点 Q の描く軌跡を求めよ.

2

(30 点)

自然数 n の約数の個数を d とする. n の約数すべてを小さい順に並べて得られる数列を a_k ($1 \leq k \leq d$) とする. したがって, $a_1 = 1$, $a_d = n$, $a_k < a_{k+1}$ ($1 \leq k < d$) である. このとき, n に対する次の 2 つの条件 (イ), (ロ) は互いに同値 ((イ) $\iff$ (ロ)) であることを示せ.

(イ) n は 60 の倍数である.

(ロ) n は 6 個以上の約数を持ち, $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_6} = \frac{1}{a_2}$ となる.

3

(30 点)

面積 1 の 3 角形 $\triangle ABC$ において, 辺 AB 上に 1 点 P をとり, P を通り辺 BC に平行な直線と辺 AC の交点を Q とする. さらに線分 PQ の中点に関して A と対称な点を R とする. 点 P が辺 AB 上を動くとき, $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ の共通部分の面積 S の最大値を求めよ.

4

(30 点)

2 次関数 $y = (ax + b)^2$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値を $M(a, b)$ とする. このとき, 次の不等式 (*) が任意の実数 a, b に対して成り立つような実数 m の中で最小のものを求めよ.

$$(*) \quad M(a, b) \leq m \int_0^1 (ax + b)^2 dx$$

5

(30 点)

箱の中に 1 と書かれたカードと 3 と書かれたカードが合計 N 枚入れている. 1 回の試行で, 箱の中からでたらめに 1 枚のカードを取り出し, その数字を見た上で, 箱の中に戻す.

A, B の 2 人がそれぞれ試行を 2 回または 3 回行って, その間に取り出したカードに書かれている数の合計が大きい方を勝ちとするゲームを行う. ただし, 1 人が 3 回の試行を行って, 取り出した数の合計が 7 または 9 の場合には, その人の得点は 0 とする規則である.

そこで A, B はそれぞれ次の作戦でゲームを行うことにした.

A : 2 回目までの合計が 2 のときは 3 回目を行い, 4 または 6 のときは 3 回目を行わない.

B : 2 回目までの合計が 2 または 4 のときは 3 回目を行い, 6 のときは 3 回目を行わない.

1 と書かれたカードの枚数を n ($0 < n < N$) とし, $p = \frac{n}{N}$ とする.

- (1) A の得点の期待値 E_A , B の得点の期待値 E_B をそれぞれ p で表せ. また, $E_A > E_B$ となるための p の条件を求めよ.
- (2) A の勝つ確率を P_A , B の勝つ確率を P_B とするとき, 「 $E_A > E_B$ ならば $P_A > P_B$ 」といえるか.

問題は, このページで終わりである。

