

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1996 年

試験時間：120 分

問題数：5 問

配点：150 点

第 1 問

xy 平面の原点 O を中心とし半径 1 の円 C 上に定点 A をとる. 同じ円上の点 X に対し, 平面上の点 Y を

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA} - 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX})\overrightarrow{OX}$$

で定める. ただし, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OX}$ の内積である. このとき,

- (1) $|\overrightarrow{OY}| = 1$ であることを示せ.
- (2) $\overrightarrow{OY} = -\overrightarrow{OA}$ となる点 X をすべて求めよ.
- (3) 点 X が円 C を 1 回まわるとき, 点 Y は同じ円を 2 回まわることを示せ.

第 2 問

$0 < a \leq b$ をみたす実数 a, b に対し, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad (n \geq 2)$$

によって定める.

- (1) すべての自然数 n に対し, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ が成り立つことを示せ.
- (2) すべての自然数 n に対し, $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{8a_n}(b_n - a_n)^2$ が成り立つことを示せ.
- (3) $a = 100, b = 900$ のとき, $b_n - a_n < 4$ をみたす最小の n を求めよ.

第 3 問

各成分が 0 以上の整数である行列 A で, $A^3 = A$ をみたすものをすべて求めよ.

第 4 問

正の実数 a に対し、実数全体で定義される関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_{-2}^2 |x - t|(t^2 - a^2) dt$$

で定める．このとき、 $g(x)$ が最小値を持つような a の範囲を求めよ．また a がそのような範囲にあるとき、 $g(x)$ の最小値を a を用いて表せ．

第 5 問

点 O を中心とする円周の 6 等分点を $P_1, P_2, \dots, P_6$ とする. サイコロを 3 回振り, 出た目が順に i, j, k のときの得点を次のように定める. i, j, k の中に同じものがあれば 0 点とする. i, j, k がすべて異なるときは, 円の中心 O が三角形 $\triangle P_i P_j P_k$ の内部にあれば 3 点, 辺上にあれば 2 点, 外部にあれば 1 点とする. 得点の期待値を求めよ.