1996年度入学試験問題

数　　学　（文系）

150点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページがある．
3. 問題は全部で5題ある．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，解答用ページに続き方をはっきり示した場合は，見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．なお，他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

（30 点）

xy 平面の原点 O を中心とし半径 1 の円 C 上に定点 A をとる．同じ円上の点 X に対し，平面上の点 Y を

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}})\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$

で定める．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ の内積である．このとき，

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OY}}\right| = 1$ であることを示せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OY}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 X をすべて求めよ．

(3) 点 X が円 C を 1 回まわるとき，点 Y は同じ円を 2 回まわることを示せ．

2

（30 点）

$0 < a \leqq b$ をみたす実数 a，b に対し，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad (n \geqq 2)$$

によって定める．

(1) すべての自然数 n に対し，$a_n \leqq a_{n+1} \leqq b_{n+1} \leqq b_n$ が成り立つことを示せ．

(2) すべての自然数 n に対し，$b_{n+1} - a_{n+1} \leqq \dfrac{1}{8a_n}(b_n - a_n)^2$ が成り立つことを示せ．

(3) $a = 100$，$b = 900$ のとき，$b_n - a_n < 4$ をみたす最小の n を求めよ．

3

（30 点）

各成分が 0 以上の整数である行列 A で，$A^3 = A$ をみたすものをすべて求めよ．

$\boxed{4}$ （30 点）

正の実数 a に対し，実数全体で定義される関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_{-2}^{2} |x - t|(t^2 - a^2)dt$$

で定める．このとき，$g(x)$ が最小値を持つような a の範囲を求めよ．また a がそのような範囲にあるとき，$g(x)$ の最小値を a を用いて表せ.

$\boxed{5}$ （30 点）

点 O を中心とする円周の 6 等分点を $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_6$ とする．サイコロを 3 回振り，出た目が順に i, j, k のときの得点を次のように定める．i, j, k の中に同じものがあれば 0 点とする．i, j, k がすべて異なるときは，円の中心 O が三角形 $\triangle \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k$ の内部にあれば 3 点，辺上にあれば 2 点，外部にあれば 1 点とする．得点の期待値を求めよ.

問題は，このページで終わりである。