

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1995 年

試験時間：120 分

問題数：5 問

配点：150 点

第 1 問

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とする. 平面上の 1 点を P , 原点を O とする.
 $\overrightarrow{OP}$ の f による像を $\overrightarrow{OQ}$, x 軸に垂直で点 Q を通る直線と x 軸との交点を R とする. 点 P が O に一致しない範囲を動くとき, $\frac{|\overrightarrow{OR}|}{|\overrightarrow{OP}|}$ の最大値が 2, $\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OP}|}$ の最大値と最小値の比が 3 となるように a, b の値を定めよ.

第 2 問

数列 $\{x_n\}$ を

$$x_n = -an^2 + bn + c, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

によって定める．このとき，次の 2 つの条件 (イ), (ロ) をみたす自然数 a, b, c を求めよ．

(イ) $4, x_1, x_2$ はこの順で等差数列である．

(ロ) すべての自然数 n に対して $\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)^2 \geq x_n x_{n+1} + 1$ が成り立つ．

第 3 問

a, r は $a \geq \frac{1}{2}$, $0 < r < \frac{1}{2}\sqrt{4a-1}$ をみたす定数とする. 円 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ の接線と放物線 $y = x^2$ で囲まれる図形の面積の最小値を a と r で表せ.

第 4 問

点 $(1, 1)$ を通るだ円

$$E : E = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \quad (a, b > 0)$$

を 1 次変換 $f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で移した集合を C とする.

- (1) $|t| < 2$ ならば, 直線 $x = t$ は異なる 2 点 A_1, A_2 で C と交わることを示せ.
- (2) $|t| < 2, t^2 \neq b^2$ とする. (1) の A_1, A_2 とそれぞれ同じ y 座標をもつ点 B_1, B_2 ($B_1 \neq A_1, B_2 \neq A_2$) が C 上にあることを示し, 線分の長さの比 $\frac{B_1 B_2}{A_1 A_2}$ を求めよ.

第 5 問

1 番から 7 番まで番号のついた席が番号順に一列に並んでいる．客が順に到着して次のように着席していくとする．

- (イ) 両端の席および先客が着席している隣の席に次の客が着席する確率は、すべて等しい．
- (ロ) 両隣が空席の席に着席する確率は、隣の席にすでに先客が着席している席または端の席に着席する確率に比べて 2 倍である．

このとき、

- (1) 3 人目の客が到着したときに、すでに 1 番と 3 番の席に先客が着席している確率を求めよ．
- (2) 4 人目の客が到着したときに、すでに 2 番、4 番、6 番の席に先客が着席している確率を求めよ．