

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1994年

試験時間：120分

問題数：5問

配点：150点

第 1 問

A, B, C, E は 2 行 2 列の行列で, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

- (1) $AB = BA$ ならば $B = pA + qE$ となる実数 p, q が存在することを示せ.
- (2) $AB = BA$, $AC = CA$ が成り立つならば, $BC = CB$ が成り立つことを示せ.
- (3) $AB = BA$, $B^2 = E$ を満たす行列 B をすべて求めよ.

第 2 問

n は 0 または正の整数とする. a_n を, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ によって定める. a_n を 3 で割った余りを b_n とし, $c_n = b_0 + \cdots + b_n$ とおく.

- (1) $b_0, \dots, b_9$ を求めよ.
- (2) $c_{n+8} = c_n + c_7$ であることを示せ.
- (3) $n + 1 \leq c_n \leq \frac{3}{2}(n + 1)$ が成り立つことを示せ.

第 3 問

xyz 空間で, $(0, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の球面を S_1 , $(0, 1, 0)$ を中心とする半径 1 の球面を S_2 とする. 2 つの球面 S_1, S_2 の共通部分の上にある点 $P(a, b, c)$ を考え, 点 P を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の球面を S_0 とする. S_0 が平面 $x - z = 0$ と交わってできる円の半径が $\frac{\sqrt{2}}{4}$ であるとき, a, b, c の値を求めよ.

第 4 問

さいころを n 回続けて投げるとき, k 回目に出る目の数を X_k とし, $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とする. Y_n が 7 で割り切れる確率を p_n とする.

(1) p_n を p_{n-1} を用いて表せ.

(2) p_n を求めよ.

第 5 問

xy 平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = x^2 - \frac{5}{4}, \quad C_2 : x = y^2 - a$$

について, C_1 と C_2 が相異なる 4 つの交点を持つような実数 a の範囲を求めよ.