

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1993年

試験時間：120分

問題数：5問

配点：150点

第 1 問

実数 a, b に対し、関数 $f(x)$ を次のように与える.

$$f(x) = \cos 2x + 4a \cos x + b$$

すべての x に対して不等式 $-6 \leq f(x) \leq 6$ が成立するような点 (a, b) の範囲を図示せよ.

第 2 問

空間において、平面 α に含まれる凸四辺形 ABCD と α に含まれない点 P を考える． $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCD$, $\triangle PDA$ の重心をそれぞれ E, F, G, H とする．また、線分 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ I, J, K, L とする．

- (1) 四辺形 EFGH と四辺形 IJKL はどちらも平行四辺形であることを示せ．さらに、これらは次の意味で相似である、すなわち正の定数 k が存在して $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{FG} = k\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{GH} = k\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{HE} = k\overrightarrow{LI}$ であることを示せ．
- (2) 四辺形 ABCD と、平行四辺形 EFGH の面積の比を求めよ．

第 3 問

$f(x)$ は x の整式, c は定数とする. 等式 $\int_x^{x+1} f(t) dt = cf(x)$ がすべての x で成り立つならば, $f(x)$ は定数であることを示せ.

第 4 問

円 $E : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の部分集合 E_1, E_2 を次のように定める.

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E \mid x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E \mid x \leq 0, y \geq 0 \right\}$$

平面の 1 次変換 f で E_1 を E_2 に移すものをすべて求めよ.

第 5 問

n を自然数とする. さいころを $2n$ 回投げて n 回以上偶数の目が出る確率を p_n とするとき, $p_n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$ であることを示せ.