

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1991 年

試験時間：120 分

問題数：5 問

配点：150 点

第 1 問

y 軸上の点 $P(0, -p)$ ($p > 0$) と定点 $A(0, 2)$ に対し, AP を直径とする円を C とする.
点 $Q(s, t)$ ($s \geq 0$) を, PQ の中点が「 C と直線 $y = 1$ の交点」となるようにとる.

- (1) s, t を求めよ.
- (2) P が y 軸上の負の部分のすべてを動くとき, 対応する Q 全体はどのような曲線になるか. また直線 PQ はこの曲線の, 点 Q での, 接線となっていることを示せ.

第 2 問

a, b は正の実数とする．円 $C : x^2 + (y - a)^2 = 1$ ，双曲線 $H : y^2 - x^2 = b^2$ を考える． H の上半分 (y 座標が正の部分) を H_+ ，下半分 (y 座標が負の部分) を H_- とする．

- (1) C が H_+ と相異なる 2 点を共有し，かつ H_- とも相異なる 2 点を共有するような (a, b) の範囲を図示せよ．
- (2) a, b を適当にとれば， C が H_+ と相異なる 4 点を共有するようにできるか否か．理由をつけて答えよ．

第 3 問

3組の対辺が互いに垂直であるような4面体 V がある．このとき， V の各辺の中点は， V の重心を中心とするある1つの球面上にあることを示せ．

第 4 問

実数 p, q に対し $x^3 - px + q = 0$ の解がすべて実数なら（すなわち虚数解を持たないなら）、 $x^3 - 2px^2 + p^2x - q^2 = 0$ の解もすべて実数であることを示せ.

第 5 問

袋の中に N 個の白玉と 2 個の赤玉がある。「袋の中の $(N + 2)$ 個の玉から無作為に 1 個を取り出し、つぎに（外部にある）白玉を 1 個袋に入れる」という試行をくり返す。

- n 回目の試行で赤玉をとり出す確率を P_n とする。
- n 回目の試行を行う前、袋の中に赤玉が 1 個あり、かつ n 回目の試行で赤玉をとり出す確率を P'_n とする。
- n 回目の試行を行う前、袋の中に赤玉が 2 個あり、かつ n 回目の試行で赤玉をとり出す確率を P''_n とする。

従って $P_n = P'_n + P''_n$ が成立している。

- (1) P'_{n+1} , P''_{n+1} を P'_n , P''_n で表す式（漸化式）を求めよ。
- (2) P_{n+1} を P_n で表す式を求め、 P_n を求めよ。