1991年度入学試験問題

数　学　（文系）

150点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページがある．
3. 問題は全部で5題ある．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，解答用ページに続き方をはっきり示した場合は，見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．なお，他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

（30 点）

y 軸上の点 $\mathrm{P}\,(0,\ -p)$（$p>0$）と定点 $\mathrm{A}\,(0,\ 2)$ に対し，AP を直径とする円を C とする．点 $\mathrm{Q}\,(s,\ t)$（$s \geqq 0$）を，PQ の中点が「C と直線 $y=1$ の交点」となるようにとる．

(1) s，t を求めよ．

(2) P が y 軸上の負の部分のすべてを動くとき，対応する Q 全体はどのような曲線になるか．また直線 PQ はこの曲線の，点 Q での，接線となっていることを示せ．

2

（30 点）

a，b は正の実数とする．円 $C : x^2+(y-a)^2=1$，双曲線 $H : y^2-x^2=b^2$ を考える．H の上半分（y 座標が正の部分）を H_+，下半分（y 座標が負の部分）を H_- とする．

(1) C が H_+ と相異なる 2 点を共有し，かつ H_- とも相異なる 2 点を共有するような $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ．

(2) a，b を適当にとれば，C が H_+ と相異なる 4 点を共有するようにできるか否か．理由をつけて答えよ．

3

（30 点）

3 組の対辺が互いに垂直であるような 4 面体 V がある．このとき，V の各辺の中点は，V の重心を中心とするある 1 つの球面上にあることを示せ．

$\boxed{4}$ （30 点）

実数 p，q に対し $x^3 - px + q = 0$ の解がすべて実数なら（すなわち虚数解を持たないなら），$x^3 - 2px^2 + p^2x - q^2 = 0$ の解もすべて実数であることを示せ．

$\boxed{5}$ （30 点）

袋の中に N 個の白玉と 2 個の赤玉がある．「袋の中の $(N+2)$ 個の玉から無作為に 1 個を取り出し，つぎに（外部にある）白玉を 1 個袋に入れる」という試行をくり返す．

- n 回目の試行で赤玉をとり出す確率を P_n とする．
- n 回目の試行を行う前，袋の中に赤玉が 1 個あり，かつ n 回目の試行で赤玉をとり出す確率を P'_n とする．
- n 回目の試行を行う前，袋の中に赤玉が 2 個あり，かつ n 回目の試行で赤玉をとり出す確率を P''_n とする．

従って $P_n = P'_n + P''_n$ が成立している．

(1) P'_{n+1}，P''_{n+1} を P'_n，P''_n で表す式（漸化式）を求めよ．

(2) P_{n+1} を P_n で表す式を求め，P_n を求めよ．

問題は，このページで終わりである。