

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1990 年

試験時間：120 分

問題数：5 問

配点：150 点

第 1 問

2つの曲線 $y = x^3 - x$ と $y = x^2 - a$ ($a > 0$) が1点 P を通り, P において共通の接線をもっている. このとき

- (1) a の値を求めよ.
- (2) 2つの曲線で囲まれた部分の面積を求めよ.

第 2 問

三角形 ABC において、 $\angle B = 60^\circ$ 、B の対辺の長さ b は整数、他の 2 辺の長さ a, c はいずれも素数である。このとき三角形 ABC は正三角形であることを示せ。

第 3 問

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表わされる 1 次変換を f , $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ で表わされる 1 次変換を g とする.

- (1) どんなベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ に対しても, 内積の間に $f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot g(\vec{v})$ の関係が成り立つことを示せ.
- (2) f が原点 O を通る直線 l をそれ自身にうつすとする. l 上に O と異なる点 P をとり, P の f による像を Q , g による像を R とする. このとき, 次の (イ), (ロ) のいずれかが成り立つことを示せ.
 - (イ) $Q = R$.
 - (ロ) 3 点 Q, R, O は直角三角形の頂点となる.

第 4 問

$f(x) = (x-1)^3 + x$, $f_1(x) = f(x)$ とし, $n \geq 2$ に対して, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ とする.

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ.

(2) どんな n (≥ 1) についても, $f_n(x) = x$ の解は $x = 1$ に限ることを示せ.

第 5 問

正 N 角形 ($N \geq 3$) の頂点に $0, 1, \dots, N-1$ と時計まわりに番号がつけてある. 頂点 0 を出発点とし, サイコロを投げて出た目の数だけ頂点を時計まわりに移動し, 着いた頂点の番号を X とする. 次にもう 1 度サイコロを投げて出た目の数だけ, 頂点 X から時計まわりに移動し, 着いた頂点の番号を Y とする. このようにして定めた確率変数 X, Y について

(1) $N = 5$ のとき, X, Y は互いに独立か.

(2) $N = 6$ のとき, X, Y は互いに独立か.

ただし確率変数 X, Y が互いに独立であるとは, $X = i$ となる確率 $P(X = i)$ と $X = i$ かつ $Y = j$ となる確率 $P(X = i, Y = j)$ との間に次の等式 (*) が任意の i, j ($0 \leq i, j \leq N-1$) について成り立つことである.

$$(*) \quad P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$$