1990年度入学試験問題

数　　学　（文系）

150点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページがある．
3. 問題は全部で5題ある．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，解答用ページに続き方をはっきり示した場合は，見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．なお，他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

（30 点）

2 つの曲線 $y = x^3 - x$ と $y = x^2 - a$（$a > 0$）が 1 点 P を通り，P において共通の接線をもっている．このとき

(1) a の値を求めよ．

(2) 2 つの曲線で囲まれた部分の面積を求めよ．

2

（30 点）

三角形 ABC において，$\angle \mathrm{B} = 60^\circ$，B の対辺の長さ b は整数，他の 2 辺の長さ a，c はいずれも素数である．このとき三角形 ABC は正三角形であることを示せ．

3

（30 点）

行列 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表わされる 1 次変換を f，$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ で表わされる 1 次変換を g とする．

(1) どんなベクトル $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ に対しても，内積の間に $f(\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot g(\overrightarrow{v})$ の関係が成り立つことを示せ．

(2) f が原点 O を通る直線 l をそれ自身にうつすとする．l 上に O と異なる点 P をとり，P の f による像を Q，g による像を R とする．このとき，次の（イ），（ロ）のいずれかが成り立つことを示せ．

（イ） $\mathrm{Q} = \mathrm{R}$.

（ロ） 3 点 Q，R，O は直角三角形の頂点となる．

4

（30 点）

$f(x) = (x-1)^3 + x$，$f_1(x) = f(x)$ とし，$n \geqq 2$ に対して，$f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ とする．

(1)　$y = f(x)$ のグラフをかけ．

(2)　どんな n（$\geqq 1$）についても，$f_n(x) = x$ の解は $x = 1$ に限ることを示せ．

5

（30 点）

正 N 角形（$N \geqq 3$）の頂点に $0, 1, \cdots, N-1$ と時計まわりに番号がつけてある．頂点 0 を出発点とし，サイコロを投げて出た目の数だけ頂点を時計まわりに移動し，着いた頂点の番号を X とする．次にもう 1 度サイコロを投げて出た目の数だけ，頂点 X から時計まわりに移動し，着いた頂点の番号を Y とする．このようにして定めた確率変数 X，Y について

(1)　$N = 5$ のとき，X，Y は互いに独立か．

(2)　$N = 6$ のとき，X，Y は互いに独立か．

ただし確率変数 X，Y が互いに独立であるとは，$X = i$ となる確率 $P(X = i)$ と $X = i$ かつ $Y = j$ となる確率 $P(X = i, Y = j)$ との間に次の等式（$*$）が任意の i，j（$0 \leqq i, j \leqq N-1$）について成り立つことである．

$$(*) \quad P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$$

問題は，このページで終わりである。