

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1987年

試験時間：120分

問題数：5問

配点：150点

第 1 問

x の 3 次式

$$f(x) = ax^3 + (a^2 + b)x^2 + (2ab + c)x + a^2 + b^2 - a$$

$$g(x) = ax^3 + (a^2 - b)x^2 + (a - 1)x + c^2 - b^2$$

および x の 2 次式

$$h(x) = x^2 + ax + b$$

を考える. (a, b, c は定数, $a \neq 0$)

$f(x), g(x)$ はともに $h(x)$ で割り切れるか, または, ともに $h(x)$ では割り切れないかの, いずれかであることを示せ.

第 2 問

定数 a, p, q に対して, 次のように x_n, y_n の列を作る.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -1-a \\ -1+a & -1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

(1) x_2, y_2, x_3, y_3 を求めよ.

(2) $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ を求めよ.

第 3 問

正の数 a を用いた係数をもつ方程式 $a\{x - (a^2 + a - 2)\} + y + 2 = 0$ の定める直線が、 x 軸、直線 $y = \frac{1}{2}x$ と交わる点を、それぞれ、 A 、 B とする．このとき、 A 、 B が次の 2 条件をみたすような正の数 a の範囲を求めよ．

- (1) A は x 軸の正の部分にある．
- (2) 原点 O と、 A 、 B の 3 点は鈍角三角形を作る．

第 4 問

4 人でジャンケンをし、負けたものが順次去って、残りでジャンケンをして、勝者が一人になるまで続けるものとする。また、4 人はそれぞれ独立に、グー（石）、チョキ（はさみ）、パー（紙）を確率 $\frac{1}{3}$ で出すものとする。

- (1) 1 回でゲームが終了する確率 p_1 および 2 回目の勝負が m 人 ($m = 2, 3, 4$) で行われる確率 p_m を求めよ。
- (2) 2 回でこのゲームが終了する確率 q を求めよ。

第 5 問

長さ 1 の針金を二つに切り，その一つで円周を作り，残りで 2 辺の長さの比が $1:k$ (k は正の定数) の長方形を作る．

- (1) この円と長方形の面積の和を最小にするためには，針金をどのように切ればよいか．
- (2) k をいろいろ変えたとき，(1) の円と長方形の面積の和の最小値 $S(k)$ が最大になるような k の値を求めよ．