

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1986年

試験時間：120分

問題数：5問

配点：150点

第 1 問

すべては 0 でない n 個の実数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ があり, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ かつ $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ を満たすとき, $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n > 0$ が成り立つことを証明せよ.

第 2 問

曲線 $y = x^3 + ax^2$ を C とし, C 上の点 $P = (u, v)$ を通り, 傾きが b の直線を L とする.
 $-1 < u < 1$ となる任意の u に対し, C と L が点 P 以外に共通点をもつような点 (a, b) の範囲を図示せよ.

第 3 問

座標平面の原点を O とし, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする. また α, β は 2 つの実数とする. 任意の点 P に対しベクトル $\overrightarrow{OP}$ の $\overrightarrow{OA}$ への正射影を $\overrightarrow{OP_1}$ (すなわち点 P_1 は P から O と A を通る直線へおろした垂線の足), $\overrightarrow{OP}$ の $\overrightarrow{OB}$ への正射影を $\overrightarrow{OP_2}$ とし, 一次変換 $f_{\alpha, \beta}$ を $f_{\alpha, \beta}(\overrightarrow{OP}) = \alpha \overrightarrow{OP_1} + \beta \overrightarrow{OP_2}$ によって定める.

一次変換 g がどのような α, β に対しても $f_{\alpha, \beta} \circ g = g \circ f_{\alpha, \beta}$ ($\circ$ は変換の合成を表す) となるための必要十分条件は, ある α', β' に対して $g = f_{\alpha', \beta'}$ となることである. これを証明せよ.

第 4 問

座標空間において、平面 $z = 1$ 上に一辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。点 A, B, C から平面 $z = 0$ におろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とする。動点 P は A から B の方向へ出発し、一定の速さで $\triangle ABC$ の周を一周する。動点 Q は同時に E から F の方向へ出発し、 P と同じ一定の速さで $\triangle DEF$ の周を一周する。線分 PQ が通過してできる曲面と $\triangle ABC, \triangle DEF$ によって囲まれる立体を V とする。

- (1) 平面 $z = a$ ($0 \leq a \leq 1$) による V の切り口はどのような図形か。
- (2) V の体積を求めよ。

第 5 問

n 個のサイコロを同時にふり，出た目の数の最大のものを M_n ，最小のものを m_n とするとき， $M_n - m_n > 1$ となる確率を求めよ．